

الإحتمالات الشرطية

Kimou.

القوائم

تعريف : (Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصر حيث $p \in \mathbb{N}^*$ نسمي قائمة ذات p عنصر من المجموعة (Ω) كل متتالية مرتبة من p حد مأخوذ من المجموعة (Ω)

مثال : $(\Omega) = \{1; 2; 3\}$

قوائم المجموعة (Ω) ذات عنصرين هي

$\{(3; 3); (3; 2); (3; 1); (2; 3); (2; 2); (2; 1); (1; 3); (1; 2); (1; 1)\}$

ملاحظة : عدد القوائم ذات p عنصر من المجموعة ذات n عنصر هو n^p

مثلا : في المثال السابق عدد القوائم ذات عنصرين من المجموعة $\{1; 2; 3\}$ هو $3^2 = 9$ الترتيبية :

(Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصرا حيث $p \in \mathbb{N}^*$ كل قائمة ذات p عنصرا متمايزا مثنى مثنى من عناصر المجموعة (Ω) تسمى ترتيبية ذات p عنصرا من المجموعة (Ω) و عددها هو A_n^p معرف كمايلي : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ حالات خاصة :

إذا كان $p > n$ فإن $A_n^p = 0$

إذا كان $p = n$: $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ نرمز له بـ $n!$ و يقرأ " n عاملي" أو "مفكوك n " في هذه الحالة كل ترتيبية تسمى أيضا تبديلة ذات n عنصر من المجموعة (Ω) **نشاط :**

نريد ترتيب 8 أشخاص حول طاولة مستديرة بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص ؟

الحل :

إذا اعتبرنا كل وضعية للجلوس هي قائمة ذات 8 عناصر من مجموعة الأشخاص ذات 8 عناصر فإن عدد هذه الوضعيات هو تبديلات لـ 8 عناصر من بين 8 عناصر لأن الأشخاص مختلفة مثنى مثنى . و عليه فعدد الوضعيات المختلفة للجلوس هو $8!$

التوفيقات :

(Ω) مجموعة منتهية ذات $n \in \mathbb{N}^*$ عنصرا حيث $p \in \mathbb{N}^*$ عدد طبيعي حيث $0 \leq p \leq n$ نسمي توفيق ذات p عنصر من عناصر المجموعة (Ω) كل جزء ذات p عنصر من المجموعة (Ω)

نرمز إلى عدد التوفيق ذات p عنصر من مجموعة ذات n عنصر بالرمز C_n^p أو $\left[\begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right]$ و نقرأ : توفيق ذات p عنصر من بين n عنصر .

نتائج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$C_n^0 = 1 : \text{ يوجد جزء وحيد خالي}$$

$$C_n^n = 1 : \text{ يوجد جزء وحيد يحتوي على كل عناصر المجموعة } (\Omega) \text{ و هو } (\Omega)$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!} \text{ إذا كان } 0 \leq p \leq n \text{ فإن :}$$

$$\text{مثال : } C_{10}^3 = \frac{10!}{3! (10-3)!} = \frac{10!}{3! 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{إذن : حسب دستور ثنائي الحد :}$$

$$B = \sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k \quad \text{نشاط :}$$

أحسب

الحل :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=0}^n \frac{3^{n-k}}{4^n} \times C_n^k \\ &= \sum_{k=0}^n 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times C_n^k \\ B &= \left(\frac{1}{4} + 3\right)^n = \left(\frac{13}{4}\right)^n \end{aligned}$$

إذن : حسب دستور ثنائي الحد :

نمذجة تجربة عشوائية

عند القيام بتجربة عشوائية تكون مجموعة نتائجها الممكنة منتهية و قابلة للعد تسمى مخارج التجربة و نرسم لها

$$E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\} \quad \text{—}$$

نعرف على هذه المجموعة قانون احتمال p و هو كل متتالية عددية معرفة من المجموعة $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ نحو المجموعة

$$[0 ; 1] \quad \text{تُعرف بعنصر } i \text{ العدد الحقيقي } p_i \text{ حيث } p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

كل عدد حقيقي p_i يسمى احتمال الحادثة x_i و نكتب $p(x_i) = p_i$

في حالة تساوي الاحتمال بين كل الحوادث فإن :

$$p_1 + p_1 + \dots + p_1 = 1 \quad \text{يكافئ} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_i = 1$$

$$n p_1 = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$p_1 = 1/n \quad \text{يكافئ}$$

مبرهنة : في حالة تساوي احتمال على مجموعة المخارج E فإن من أجل كل حادثة A

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } E} \quad \text{لدينا :}$$

مثلا : نسحب كرة واحدة من كيس فيه 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6

لنكن A الحادثة : سحب كرة رقمها مضاعف 3إذا كان الاحتمال متساوي فإن : $p(A) = 2/6$ لأن :

$$E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \quad \text{إذن : عدد عناصر } E \text{ هو } 6$$

$$A = \{3 ; 6\} \quad \text{إذن : عدد عناصر } A \text{ هو } 2$$

خواص أساسية و مصطلحات الاحتمالات

 E مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية . A و B حادثتين (مجموعتين جزئيتين من المجموعة E) p قانون احتمال معرف على المجموعة E

$$0 \leq p(A) \leq 1 \quad \text{— 1}$$

$$p(\emptyset) = 0 \quad \text{حادثة مستحيلة .} \quad \text{— 2}$$

$$p(E) = 1 \quad \text{حادثة أكيدة .} \quad \text{— 3}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{— 4} \quad \text{حادثتان كئيفيتان .}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{— 5} \quad \text{حادثتان غير متلاصقتين .}$$

$$\bar{A} = E - A \quad ; \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) \quad \text{— 6}$$

المتغير العشوائي

نسمي متغير عشوائي X كل دالة عددية معرفة على مجموعة الامكانيات E مزودة بقانون احتمال p حيث X يأخذ القيم

$$x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n \quad \text{بالاحتمالات } p_1 ; p_2 ; \dots ; p_n \quad \text{معرفا كئيفي : } p(X = x_i) = p_i$$

مثال : صندوق يحتوي على كرتين لا نفرق بينهما عند اللمس أحدهما بيضاء B و الأخرى سوداء N نسحب 3 مرات كرة

واحدة مع إرجاعها بعد كل سحب إلى الصندوق .

$$E = \{BBB ; BBN ; BNB ; BNN ; NBB ; NBN ; NNB ; NNN\} \quad \text{إذن : المخارج الممكنة}$$

ليكن سحب كرة بيضاء يؤدي إلى ربح 20 DA و سحب كرة سوداء يؤدي إلى خسارة 10 DA . نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل حادثة مجموع المبالغ الناتجة (ربح أو خسارة مثلا : BBN يؤدي إلى $X = 20 + 20 - 10$)

القيم الممكنة لـ X :

الحوادث	BBB	BBN	BNB	BNN	NBB	NBN	NNB	NNN
قيم X	60	30	30	0	30	0	0	-30

إن : X يأخذ القيم $\{-30; 0; 30; 60\}$ يكون $x = -30$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة NNNيكون $x = 0$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BNN أو NBN أو NNBيكون $x = 30$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBN أو BNB أو NBBيكون $x = 60$ إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة BBB

$$p(X = -30) = 1/8$$

$$p(X = 0) = 3/8$$

$$p(X = 30) = 3/8$$

$$p(X = 60) = 1/8$$

الآن : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو كما يلي :

X_i	-30	0	30	60
$p(X = X_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

الأمثلة الرياضية ، التباين

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم $\{X_1; X_2; \dots; X_n\}$

$$p(X = X_i) = p_i$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n X_k p(X = X_k)$$

الأمثلة الرياضية للمتغير العشوائي X هو

$$\text{تباين المتغير العشوائي } X \text{ هو العدد : } \text{Var}(X) = \sum_{k=1}^n (X_k - E(X))^2 p(X = X_k)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو

التفسير الفيزيائي

 $E(X)$ هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب عند القيام بالتجربة عدة مرات .و عليه فإن : إذا كان $E(X) = 0$ فإن اللعبة عادلةإذا كان $E(X) > 0$ فإن اللعبة مربحةإذا كان $E(X) < 0$ فإن اللعبة ليست في صالح اللاعب

سلسلة

 X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس المجموعةعدد حقيقي ، $E(X)$ ، $E(Y)$ ، $E(X + Y)$ هي على الترتيب الأمثلة الرياضية للمتغيرات العشوائية X ، Y ، $X + Y$

$$E(aX) = aE(X) \text{ و } E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

كل : X متغير عشوائي و a و b عددين حقيقيين

$$E(b) = b \text{ لأن } E(X + b) = E(X) + b \quad -1$$

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad -2$$

$$\sigma(aX) = |a| \sigma(X) \text{ و } \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X) \quad -3$$

$$\sigma(X + b) = \sigma(X) \text{ و } \text{Var}(X + b) = \text{Var}(X) \quad -4$$

ثبات الخاصية (2)

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=1}^n (X_k - E(X))^2 p(X = X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^n [X_k^2 - 2X_k E(X) + E^2(X)] p(X = X_k)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 p(X = X_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^n X_i p(X = X_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^n p(X = X_i)$$

$$\sum_{i=1}^n p(X = X_i) = 1 \text{ لأن } = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + E^2(X)$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

يأخذ القيم

مرات كرة

العشوائي X

الاحتمالات الشرطية

تعريف :

A و B حادثتان حيث $p(A) \neq 0$ احتمال وقوع الحادثة B علما أن A محققة يسمى احتمال شرطي نرمز له بـ $p_A(B)$ حيث $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ ونقرأ : احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة

مثال : نرمي زهرة نرد ذات 6 أوجه غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 لتكن A الحادثة النتيجة عدد فردي

B الحادثة النتيجة عدد مضاعف 3

لدينا : $p(A) = 3/6$ ، $p(B) = 2/6$ ، $p(A \cap B) = 1/6$

منه : احتمال الحصول على عدد مضاعف 3 علما أن النتيجة عدد فردي هي $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$ تحقيق : إذا كانت النتيجة فردية فإن عدد الحالات الممكنة هي $\{1; 3; 5\}$ من بين هذه الحالات العدد 3 فقط مضاعف 3 إذن : $p_A(B) = 1/3$

تطبيق :

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا تفرق بينها عند اللمس .

نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحل :

عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

لتكن R كرة حمراء و V كرة خضراء

الحادثة A توافق الحالات التالية : RR أو RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 + A_6^2 = 18 + 30 = 48$

نتيجة : $p(A) = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

الحادثة B علما أن A محققة توافق الحالات RV من بين RR و RV

إذن : عدد هذه الحالات هو $6 \times 3 = 18$ من بين $18 + 30 = 48$

نتيجة : $p_A(B) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

خلاصة : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ منه : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

أي : $p(A \cap B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

تحقيق : الحادثة $(A \cap B)$ توافق الحالات RV وعددها $6 \times 3 = 18$

منه : $p(A \cap B) = \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$

الحوادث المستقلة :

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا و فقط إذا كان $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(أي إذا كان $p(A) \neq 0$ فإن $p_A(B) = P(B)$)

المتغيرات العشوائية المستقلة

X و Y متغيران عشوائيان على نفس الفضاء الاحتمالي E

لتكن $X_1; X_2; \dots; X_n$ قيم المتغير العشوائي X

و $Y_1; Y_2; \dots; Y_m$ قيم المتغير العشوائي Y

تعريف :

نقول أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان إذا و فقط إذا كانت الحادثتان $X = X_i$ و $Y = Y_j$ مستقلتان من أجل كل

$1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$

ملاحظة : إذا كان المتغيران العشوائيان X و Y مرتبطان بتجربتين مختلفتين فإنهما حتماً مستقلان
نشاط :

نرمي ثلاث مرات متتالية قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه و ظهر

نرمز بـ X لعدد مرات ظهور الوجه في الرمية الأولى

نرمز بـ Y لعدد مرات ظهور الوجه في الرميتين الثانية و الثالثة

تحقق أن X و Y هما متغيران عشوائيان مستقلان .

الحل :

نرمز إلى الوجه بـ F و الظهر بـ P

إن : مجموعة الامكانيات للتجربة هي كما يلي :

$$E = \{PPF ; PPP ; PFF ; FFP ; FFF ; FFP ; FPF ; FPP\}$$

الوجه إما يظهر مرة واحدة في الرمية الأولى أو لا يظهر إطلاقاً .

إن : قيم المتغير العشوائي X هي $\{0 ; 1\}$

الوجه إما لا يظهر في كلا من الرميتين الثانية و الثالثة أو يظهر مرة واحدة فقط إما في الثانية أو الثالثة أو يظهر في كلا من

الثانية و الثالثة إن : المتغير العشوائي Y يأخذ القيم $\{0 ; 1 ; 2\}$

الحادثة	الحالات الملائمة للحادثة	احتمال الحادثة
$X = 0$	PPF ; PPP ; PFF ; FFP	$4/8 = 1/2$
$X = 1$	FFF ; FFP ; FPF ; FPP	$4/8 = 1/2$
$Y = 0$	PPP ; FPP	$2/8 = 1/4$
$Y = 1$	PPF ; PFP ; FFP ; FPF	$4/8 = 1/2$
$Y = 2$	FFF ; PFF	$2/8 = 1/4$

من جهة أخرى لدينا الاحتمالات التالية :

الحادثة	الحالات الملائمة	احتمال الحادثة
$X = 0$ و $Y = 0$	PPP	$1/8$
$X = 0$ و $Y = 1$	FPF ; PPF	$2/8 = 1/4$
$X = 0$ و $Y = 2$	PFF	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 0$	FPP	$1/8$
$X = 1$ و $Y = 1$	FFP ; FPF	$2/8 = 1/4$
$X = 1$ و $Y = 2$	FFF	$1/8$

مقارنة :

$$p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 0)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 0 ; Y = 1)$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 0 ; Y = 2)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 0)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X = 1 ; Y = 1)$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = p(X = 1 ; Y = 2)$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0 ; 1\}$ من أجل كل $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$ لدينا :

$$p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i ; Y = k)$$

إن : الحوادث X_i و Y_k مستقلة مثنى مثنى .

منه : المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان .

ن أجل كل

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 -

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها عند اللمس .
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا . أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب

الحل - 1

لحساب عدد الحالات الممكنة للسحب نميز بين ثلاث أنواع من السحب كمايلي :

- (a) سحب في آن واحد : إذن كل سحب هو توفيق لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو C_{32}^8
- (b) سحب على التوالي دون ارجاع : إذن كل سحب هو ترتيب لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو A_{32}^8

- (c) سحب على التوالي بارجاع : إذن كل سحب هو قائمة لـ 8 عناصر من بين 32 عنصر إذن : عدد الحالات الممكنة هو $(32)^8$

التمرين 2 -

أحسب ماييلي :

$$B = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} \quad (b) \quad A = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2^k} \quad (a)$$

الحل - 2

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k \times (1)^{n-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned} \quad (a)$$

$$A = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{3^{n-k}}{4^k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k \times 3^{n-k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \left(3 + \frac{1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{13}{4}\right)^n \end{aligned} \quad (b)$$

$$B = \left(\frac{13}{4}\right)^n \quad \text{منه :}$$

التمرين 3 -

يحتوي صندوق A على 3 كرات حمراء ؛ 3 كرات سوداء ؛ 5 كرات خضراء
يحتوي صندوق B على 7 كرات حمراء ؛ 4 كرات سوداء ؛ 2 كرات خضراء
جميع الكرات متساوية الاحتمال في السحب

نسحب كرة من الصندوق A ثم كرة من الصندوق B

لتكن الحوادث التالية : V : سحب كرة خضراء من الصندوق A

B : سحب كرة خضراء من الصندوق B

N : سحب كرة سوداء من الصندوق B

R : سحب كرة حمراء من الصندوق B

1 - أحسب $p(R)$ ؛ $p(N)$ ؛ $p(V')$ ؛ $p(V)$

2 - أحسب احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B

الحل - 3

- 1 - عدد الكرات الخضراء في الصندوق A هو 5 إذن : $p(V) = 5/11$
 عدد الكرات الخضراء في الصندوق B هو 2 إذن : $p(V') = 2/13$
 عدد الكرات السوداء في الصندوق B هو 4 إذن : $p(N) = 4/13$
 عدد الكرات الحمراء في الصندوق B هو 7 إذن : $p(R) = 7/13$

2 - احتمال سحب كرة خضراء من الصندوق A و من الصندوق B هو $p(V) \times p(V') = \frac{5}{11} \times \frac{2}{13}$

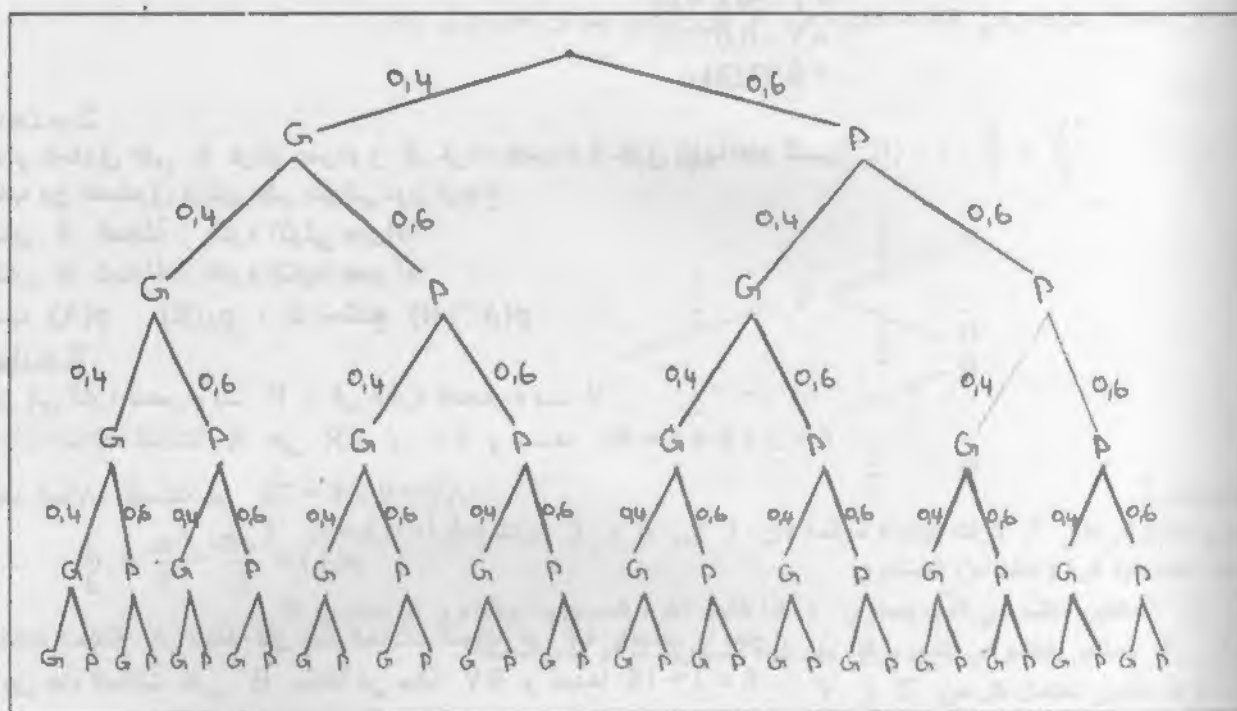
تمرين - 4

يشارك رشيد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها هو 0,6 . قرر رشيد المحاولة 5 مرات متتالية . نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرافق بكل 5 محاولات عدد مرات الفوز

- 1 - عرف قانون الاحتمال للمتغير X
 2 - أوجد الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X
 3 - ما هو احتمال الحادثتين : A : دوما بفشل في المحاولات الخمسة
 B : يفوز مرة واحدة على الأقل

الحل - 4

نرمز إلى حالة الفوز بـ G و إلى حالة الفشل بـ P
 تمثل الحالات الممكنة على شكل شجرة كما يلي :



1 - X هو عدد مرات الفوز إذن : X يأخذ القيم {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} منه الجدول التالي :

الحالات الملائمة للحادثة	الحادثة
PPPPP	X = 0
GPPPP ; PGPPP ; PPGPP ; PPPGP ; PPPPG	X = 1
GPPPG ; GPPGP ; GPGPP ; GGPPP ; PGGPP ; PGPGP ; PGPPG ; PPGGP ; PPGPG ; PPPGG	X = 2
GGGPP ; GGPGP ; GGPPG ; GPGGP ; GPGPG ; GPPGG ; PGGGP ; PGPGG ; PPGGG ; PGGPG	X = 3
GGGGP ; GGGPG ; GGPGG ; GPGGG ; PGGGG	X = 4
GGGGG	X = 5

في كل مرة لدينا : $p(P) = 0,6$ و $p(G) = 0,4$
منه : النتائج التالية :

$$\begin{aligned} p(X=0) &= (0,6)^5 = 0,07776 \\ p(X=1) &= 5 \times [(0,6)^4 \times (0,4)] = 0,2592 \\ p(X=2) &= 10 \times [(0,6)^3 \times (0,4)^2] = 0,3456 \\ p(X=3) &= 10 \times [(0,6)^2 \times (0,4)^3] = 0,2304 \\ p(X=4) &= 5 \times [(0,6) \times (0,4)^4] = 0,0768 \\ p(X=5) &= (0,4)^5 = 0,01024 \end{aligned}$$

منه قانون المتغير العشوائي X كميالي :

X_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = X_i)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

$$E(X) = 0 \times (0,07776) + 1(0,2592) + 2(0,3456) + 3(0,2304) + 4(0,0768) + 5(0,01024) = 2 \quad - 2$$

$$Var(X) = 0 \times (2 - 0,07776)^2 + 1(2 - 0,2592)^2 + 2(2 - 0,3456)^2 + 3(2 - 0,2304)^2 + 4(2 - 0,0768)^2 + 5(2 - 0,01024)^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$$p(A) = P(X=0) = 0,07776 \quad - 3$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) \\ &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - 0,07776 \\ &= 0,92224 \end{aligned}$$

التمرين 5

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء و 3 كرات خضراء لا تفرق بينها عند اللمس
نسحب من الصندوق كرتين على التوالي دون ارجاع .

لتكن A الحادثة : الكرة الأولى حمراء

و لتكن B الحادثة : الكرة الثانية خضراء

أحسب $p(A)$ ، $p_A(B)$ ، ثم استنتج $p(A \cap B)$

الحل 5

نرمز إلى الكرة الحمراء بـ R و إلى الكرة الخضراء بـ V

الحالات الموافقة للحادثة A هي RR أو RV وعددها $6 \times 5 + 6 \times 3 = 48$

و عدد الحالات الممكنة هو $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

$$p(A) = \frac{48}{72} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{إذن :}$$

إذا كانت الحادثة A محققة فإن عدد الحالات الممكنة هو 48 (حسب ما سبق)

من بين هذه الحالات تكون B محققة في حالة RV وعددها $6 \times 3 = 18$

$$p_A(B) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8} \quad \text{إذن :}$$

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) \quad \text{منه :} \quad p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

التمرين 6

يحتوي صندوق A_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

و يحتوي صندوق A_2 على 2 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

كل الكرات متساوية الاحتمال و لا تفرق بينها عند اللمس

نرمي قطعة نقدية غير مزيفة . إذا ظهر الوجه نسحب عشوائياً كرة من الصندوق

A_1 أما إذا ظهر "ظهر" نسحب كرة من الصندوق A_2

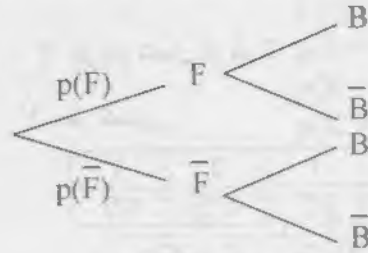
تسمى F الحادثة "ظهور وجه" و B الحادثة "الكرة المسحوبة بيضاء"

1 - أحسب $P(F)$ و $P(\bar{F})$

2 - أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\bar{B})$

3 - أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4 - أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



الحل - 6

1 - القطعة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\bar{F}) = 1/2$

2 - إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

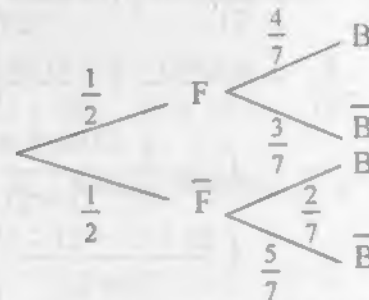
منه : $P_F(B) = \frac{4}{7}$

إذن : $P_F(\bar{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

3 - إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي \bar{F} فإن السحب يتم من الصندوق A_2

منه : $P_{\bar{F}}(B) = \frac{2}{7}$

إذن : $P_{\bar{F}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$



تمرين - 7

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3. سحب عشوائي كرة واحدة من الصندوق

ليكن X التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و إلا يساوي 0

وليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

1 - عرف قانون احتمال كل من X و Y

2 - أحسب الأمل الرياضي لكل من X و Y

3 - برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

4 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي $X \cdot Y$ و أحسب أمله الرياضي

الحل - 7

1 - X يأخذ القيم $\{0; 1\}$

$$p(X=0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad p(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

منه : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X=X_i)$	1/2	1/2

Y يأخذ القيم $\{1; 2; 3\}$

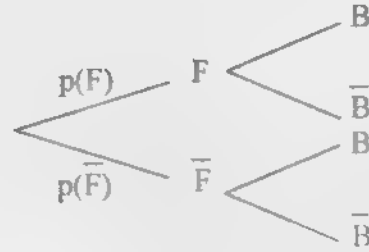
سمي F الحادثة "ظهور وجه" و B الحادثة "الكرة المسحوبة بيضاء"

1- أحسب $P(F)$ ؛ $P(F)$

2- أحسب $P_F(B)$ ثم استنتج $P_F(\bar{B})$

3- أحسب $P_{\bar{F}}(B)$ ثم استنتج $P_{\bar{F}}(\bar{B})$

4- أكمل الشجرة التالية بالنتائج المحصل عليها :



5- 6

عصاة النقدية ليست مزيفة إذن : ظهور وجه أو ظهر لهما نفس الاحتمال

أي : $P(F) = 1/2$ و $P(\bar{F}) = 1/2$

إذا علمت أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي F فإن السحب يتم من الصندوق A_1

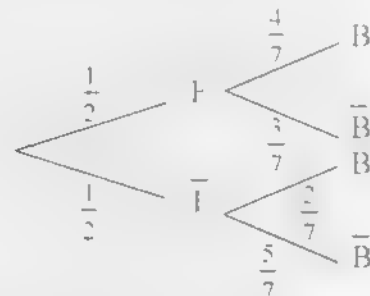
$$P_F(B) = \frac{4}{7}$$

$$P_F(\bar{B}) = 1 - P_F(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

إذا علمنا أن نتيجة رمي القطعة النقدية هي \bar{F} فإن السحب يتم من الصندوق A_2

$$P_{\bar{F}}(B) = \frac{2}{7}$$

$$P_{\bar{F}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{F}}(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$



7- 7

3- صندوق على 3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 و 3 كرات صفراء مرقمة من 1 إلى 3.

عشوائيا كرة واحدة من الصندوق

أ. التمتغير العشوائي الذي يساوي 1 إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء و 0 إذا كانت صفراء

ب. المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة مسحوبة الرقم الذي تحمله

ج. عرف قانون احتمال كل من X و Y

د. حسب الأمل الرياضي لكل من X و Y

هـ. برهن أن المتغيران العشوائيان X و Y مستقلان

و. عرف قانون احتمال المتغير العشوائي $X \cdot Y$ و أحسب أمله الرياضي

7- 7

أ. X يأخذ القيم $\{0; 1\}$

$$p(X=0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad p(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب. : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

X_i	0	1
$p(X=X_i)$	1/2	1/2

ج. يأخذ القيم $\{1; 2; 3\}$

$$p(Y=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{كرات تحمل الرقم 1}$$

$$p(Y=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{كرات تحمل الرقم 2}$$

$$p(Y=3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{كرات تحمل الرقم 3}$$

منه : قانون احتمال المتغير Y هو كمايلي :

Y_i	1	2	3
$p(Y=Y_i)$	1/3	1/3	1/3

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad -2$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$p(X=0; Y=1) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \quad -3$$

$$p(X=0; Y=2) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=0; Y=3) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=0) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=1) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=2) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$p(X=1; Y=3) = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X=1) \times p(Y=3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

نتيجة : من أجل كل $i \in \{0; 1\}$ و من أجل كل $k \in \{1; 2; 3\}$ لدينا :

المتغيرات العشوائيات X و Y مستقلتان $p(X=X_i; Y=Y_k) = p(X=X_i) \times p(Y=Y_k)$

4 - القيم الممكنة للمتغير العشوائي XY هي $\{0; 1; 2; 3\}$

$$p(XY=0) = p(X=0) = \frac{1}{2}$$

$$p(XY=1) = p(X=1; Y=1) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=2) = p(X=1; Y=2) = \frac{1}{6}$$

$$p(XY=3) = p(X=1; Y=3) = \frac{1}{6}$$

منه قانون المتغير العشوائي XY كمايلي

α_i	0	1	2	3
$p(XY=\alpha_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(XY) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1$$

التمرين - 8

نرمي زهرة نرد غير متوازنة مرة واحدة

ليكن X العلامة المحددة كمايلي :

(a) العلامة (10-) إذا ظهر الرقم 1

(b) العلامة (10) إذا ظهر الرقم 6

(c) العلامة (0) في الحالات الأخرى

نفرض أن احتمال ظهور الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12
عرف قانون احتمال العدد X

الحل - 8

احتمال ظهور الرقم 6 هو $1 - (5 \times 0,12) = 1 - 0,6 = 0,4$

عنه : النتائج التالية :

$$p(X = -10) = 0,12$$

$$p(X = 10) = 0,4$$

$$p(X = 0) = 4 \times 0,12 = 0,48$$

منه قانون الاحتمال للعدد X هو كمايلي :

X_i	0	-10	10
$p(X = X_i)$	0,48	0,12	0,4

تمرين - 9

بسط الأعداد التالية :

$$\frac{13! - 12!}{12!} \quad (c) \quad \frac{8!}{6!} \quad (a)$$

$$\frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!} \quad (d) \quad \frac{11!}{9! \times 2!} \quad (b)$$

الحل - 9

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$$

$$\frac{11!}{9! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2 \times 1} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

$$\frac{13! - 12!}{12!} = \frac{13 \times 12! - 12!}{12!} = \frac{12! (13 - 1)}{12!} = 13 - 1 = 12$$

$$\frac{4}{12!} - \frac{4}{11!} + \frac{4}{10!} = \frac{4}{12 \times 11 \times 10!} - \frac{4}{11 \times 10!} + \frac{4}{10!}$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{1}{12 \times 11} - \frac{1}{11} + 1 \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{1 - 12 + 11 \times 12}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{121}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{4}{10!} \left(\frac{11 \times 11}{12 \times 11} \right)$$

$$= \frac{11}{10! \times 3}$$

تمرين - 10

= عدد طبيعي غير معدوم . بسط العبارات التالية :

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad (c) \quad \frac{n!}{(n+1)!} \quad (a)$$

$$\frac{n!}{(2n+1)!} - (n-1)! \quad (d) \quad \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \quad (b)$$

حل - 10

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!} = 2n(2n+1) = 4n^2 + 2n$$

$$\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n)}{(n+1)(n)(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} \quad (c)$$

$$\frac{n!}{n} - (n-1)! = \frac{n! - n(n-1)!}{n} = \frac{n! - n!}{n!} = 0 \quad (d)$$

التمرين 11أكتب العبارات التالية باستعمال العامل ($!$)

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \quad (a)$$

$$n(n-1)(n-2) \text{ حيث } n \text{ عدد طبيعي أكبر من } 2 \quad (b)$$

$$\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} \quad (c)$$

الحل 11

$$5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{4!} \quad (a)$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!} \quad (b)$$

$$\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 6 \times 7} = \frac{12!}{8!} = \frac{12!}{8!} \times \frac{4!}{7!} \quad (c)$$

التمرين 12

1 - بكم طريقة يمكن اختيار تلميذين من بين 26 تلميذ

2 - بكم طريقة يمكن اختيار مسؤول عنهم ثم نائب لهذا المسؤول

الحل 12

1 - اختيار تلميذين من بين 26 هو توفيق لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها إذن :

$$C_{26}^2 = \frac{26!}{24! \times 2!} = \frac{26 \times 25 \times 24!}{24! \times 2} = 25 \times 13$$

2 - اختيار مسؤول ثم نائب له هو ترتيب لعنصرين من بين 26 عنصر و عددها $A_{26}^2 = 26 \times 25$ **التمرين 13**

في لعبة الرهان الرياضي يختار المشارك 6 أرقام من بين 49 رقما (كرات مرقمة من 1 إلى 49)

1 - ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

2 - استنتج احتمال فوز المشارك بسحب 6 أرقام صحيحة .

الحل 13

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49}{6!} \quad 1 - \text{عدد الحالات الممكنة هو}$$

2 - من بين الحالات الممكنة يوجد حالة واحدة فقط تحمل 6 أرقام صحيحة .

$$\frac{1}{C_{49}^6} = \frac{6!}{44 \times 45 \times 46 \times 47 \times 48 \times 49} \quad \text{إذن : الاحتمال المطلوب هو :}$$

التمرين 14

يحتوي صندوق على 10 كرات موزعة كمايلي : 4 كرات سوداء و 6 كرات بيضاء

نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد . فما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

(a) كرة بيضاء (b) كرة بيضاء على الأقل

(c) 3 كرات ليست من نفس اللون

نضيف إلى هذا الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة نسحب كرتين من نفس اللون1 - أثبت أن من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = (n+4)^2(n+6)$ 2 - كم نضيف من كرة سوداء و بيضاء حتى يكون $X_n = 2016$

الحل - 14

(a) سحب كرة بيضاء هي الحادثة : كرة بيضاء و كرتين سوداوين

$$C_6^1 \times C_4^2 = 6 \times 6 = 36 \quad \text{منه الحالات الممكنة هو}$$

(b) سحب كرة بيضاء على الأقل هو عدد كل الحالات الممكنة ماعدا الحالات التي تكون فيها كل الكرات سوداء إذن عددها هو :

$$C_{10}^3 - C_4^3 = \frac{10!}{7! \times 3!} - \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{3 \times 2} - 4 = 120 - 4 = 116$$

(c) لا يمكن سحب 3 كرات ليست من نفس اللون ، لأن الألوان المختلفة المتوفرة هي الأسود و الأبيض فقط .
بعد اضافة n كرة سوداء و n كرة بيضاء تصبح الوضعية كميلي : (n + 4) كرات سوداء + (n + 6) كرات بيضاء

سحب كرتين من نفس اللون أي } إما كرتين سوداوين و كرة بيضاء
أو كرتين بيضاوين و كرة سوداء

$$X_n = C_{n+4}^2 \times C_{n+6}^1 + C_{n+6}^2 \times C_{n+4}^1 \quad \text{منه :}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(n+4)!}{(n+4-2)! \times 2!} \times (n+6) + \frac{(n+6)!}{(n+6-2)! \times 2!} \times (n+4) \\ &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)!(n+6)}{(n+2)! \times 2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)!(n+4)}{(n+4)! \times 2} \\ &= \frac{(n+4)(n+3)(n+6)}{2} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{2} \\ &= \frac{(n+4)(n+6)}{2} (n+3+n+5) \\ &= \frac{(n+4)(n+6)(2n+8)}{2} \\ &= (n+4)(n+6)(n+4) \\ &= (n+4)^2 (n+6) \end{aligned}$$

$$X_n = 2016 \quad \text{يكفي} \quad (n+4)^2 (n+6) = 2016$$

لنحلل العدد 2016 كما يلي :

2016	3
672	3
224	2
112	2
56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$$\begin{aligned} 2016 &= 3^2 \times 2^5 \times 7 \\ &= 3^2 \times 2^4 \times 2 \times 7 \\ &= 3^2 \times 4^2 \times 14 \\ &= (3 \times 4)^2 \times 14 \\ &= (8+4)^2 \times (8+6) \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $X_n = (n+4)^2 (n+6)$ نحصل على $n = 8$
إذن : يكفي اضافة 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء

سرين - 15

حتوي صندوق على 15 كرات موزعة كمايلي :

بيضاء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3

خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 3 ، 3 ، 3

سحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد .

حسب عدد الحالات الملائمة للحوادث التالية :

أ : سحب 3 كرات من نفس اللون .

ب : سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم

ج : سحب 3 كرات مجموع أرقامها 6

د : سحب أحد الأرقام القريبة على الأقل .

نفس اللون

الحل - 15

(A) الحادثة 3 كرات من نفس اللون توافق الحادثة 3 كرات بيضاء أو 3 كرات حمراء أو 3 كرات حمراء
إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = \frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{3!2!} + 4 = 20 + 10 + 4 = 34$$

(B) الحادثة 3 كرات تحمل نفس الرقم توافق الحادثة 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 كرات تحمل الرقم 2 أو 3 كرات تحمل الرقم 3
إذن : عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي :

$$C_6^3 + C_4^3 + C_5^3 = 20 + 4 + 10 = 34$$

(C) الحادثة 3 كرات مجموع أرقامها 6 توافق الحادثة : سحب الأرقام {3, 2, 1} أو {2, 2, 2} منه عدد الحالات

$$C_6^1 \times C_4^1 \times C_5^1 + C_4^3 = 6 \times 4 \times 5 + \frac{4!}{3!} = 120 + 4 = 124$$

(D) الحادثة "أحد الأرقام على الأقل فردي" توافق الحادثة العكسية للحادثة سحب كل الأرقام زوجية منه عدد الحالات الملائمة

$$C_{15}^3 - C_4^3 = \frac{15!}{12!3!} - \frac{4!}{3!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} - 4 = 485 - 4 = 481$$

التمرين - 16

يتنافس 10 لاعبين في دورة كرة تنس الطاولة بكم طريقة مختلفة يمكن تنظيم الدور الأول (5 مباريات)

الحل - 16

نرقم اللاعبين من 1 إلى 10 و نوزعهم على شكل ثنائيات للتنافس كمايلي : (8;7) + (6;5) + (4;3) + (2;1) (10;9)

اللاعب الأول يمكن أن يتنافس مع 9 لاعبين (ماعدًا نفسه)

اللاعب الثالث يمكن أن يتنافس مع 7 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين السابقين)

اللاعب الخامس يمكن أن يتنافس مع 5 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين الأربعة الأوائل)

اللاعب السابع يمكن أن يتنافس مع 3 لاعبين (ماعدًا نفسه و اللاعبين الستة الأوائل)

اللاعب التاسع يمكن أن يتنافس مع لاعب واحد فقط (ماعدًا نفسه و 8 لاعبين الأوائل)

نتيجة : يمكن اختيار مباريات الدورة الأولى بـ $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 945$ طريقة مختلفة .

مثال : في حالة أربعة لاعبين فقط نحصل على عدد الطرق المختلفة هو $3 \times 2 \times 1 = 6$ كمايلي :

الطريقة الأولى : A ينافس B و C ينافس D

الطريقة الثانية : A ينافس C و B ينافس D

الطريقة الثالثة : A ينافس D و B ينافس C

التمرين - 17

من بين 5 جزائريين و 10 سعوديين و 10 فلسطينيين نختار 3 شخصيات من جنسيات مختلفة فما هو عدد الثلاثيات الممكنة ؟

الحل - 17

الأشخاص من جنسيات مختلفة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $C_5^1 \times C_{10}^1 \times C_{10}^1 = 5 \times 10 \times 10 = 500$

التمرين - 18

يحتوي صندوق على 49 كرية مرقمة من 1 إلى 49 منها 6 كرات حمراء و 43 كرات بيضاء .

نسحب في آن واحد 6 كرات .

1 - ما هو عدد الحالات الممكنة

2 - ما هو عدد الحالات الملائمة للحصول على 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء

الحل - 18

1 - سحب في آن واحد 6 كرات : الحالات الممكنة هي توفيت لـ 6 عنصر من بين 49 عنصر و عددها

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{43! \times 6!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6!}$$

2 - سحب 3 كرات حمراء من بين 6 و 3 كرات بيضاء من بين 43 :

$$C_6^3 \times C_{43}^3 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{43!}{40! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{43 \times 42 \times 41}{3 \times 2} = 20 \times 43 \times 7 \times 41$$

نصيرين - 19

صنع بين يدي طفل ثلاث أقلام ملونة اخضر ، أحمر ، اصفر ، نطلب من الطفل تلوين الواجهة الستة لعبة مكعبة الشكل .
كـد طريقة مختلفة يمكن التلوين ؟

نحل - 19

- ربع الألوان على الواجهة الستة هو قوائم ذات 6 عناصر من بين 3 عناصر حيث يمكن استعمال لون واحد للواجهة الستة معا
فه عدد الطرق المختلفة هو $3^6 = 729$

نصيرين - 20

كون قسم من 18 تلميذ و 12 تلميذة
ريد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ، نائب ، أمين (3 أشخاص مختلفة)

1 - ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها

2 - ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية :

(A) الأمين تلميذة

(B) التلميذ X موجود في اللجنة

(C) الرئيس تلميذ و الأمين تلميذة

(D) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين

نحل - 20

- عدد اللجان هو ترتيب لـ 3 عناصر من بين 30 عنصر و عددها $A_{30}^3 = 30 \times 29 \times 28$
2 - لتكن اللجنة مكونة كمايلي :

P	V	S
---	---	---

أمين نائب رئيس

الأمين تلميذة إذن : عدد الحالات الممكنة هو : $12 \times A_{29}^2 = 29 \times 28 \times 12$

تلميذ X موجود في اللجنة : هي الحادثة العكسية للحادثة التلميذ X غير موجود في اللجنة إذن : عدد الحالات الممكنة

هو : $A_{30}^3 - A_{29}^3 = 30 \times 29 \times 28 - 29 \times 28 \times 27 = 29 \times 28 \times 3$

لرئيس تلميذ و الأمين تلميذة : عدد الحالات الممكنة هو : $18 \times 28 \times 12$

الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين إذن :

لما الرئيس تلميذ و النائب تلميذة

أو الرئيس تلميذة و النائب تلميذ

- عدد الحالات الممكنة : $18 \times 12 \times 28 + 12 \times 18 \times 28 = 2 \times 12 \times 18 \times 28$

نصيرين - 21

وجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

$$C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \quad (c) \quad C_n^3 = 56$$

$$9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2$$

نحل - 21

$$\begin{cases} n > 3 \\ \frac{n!}{(n-3)!3!} \end{cases} \quad C_n^3 = 56 \quad \text{يكافئ} \quad (1) \quad 56 \dots \dots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 56 \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n-1)(n-2) = 56 \times 3! \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6 \quad \text{تكافئ}$$

$$n = 8 \quad \text{تكافئ}$$

نحل : $8 > 3$ إذن : $C_n^3 = 56$ من أجل $n = 8$

$$\begin{cases} n \geq 2 ; 2n \geq 2 \\ 9 \times \frac{n!}{(n-2)! 2!} = 2 \times \frac{(2n)!}{(2n-2)! 2!} \dots\dots\dots (1) \end{cases} \quad \text{يكافئ } 9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2 \quad (b)$$

$$\frac{9 \times n!}{(n-2)!} = \frac{2 \times (2n)!}{(2n-2)!} \quad \text{تكافئ } (1)$$

$$9 \times n(n-1) = 2 \times 2n(2n-1) \quad \text{تكافئ}$$

$$9n^2 - 9n = 8n^2 - 4n \quad \text{تكافئ}$$

$$n^2 - 5n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2n \geq 2 \text{ مرفوض لأن } n=0 \\ \text{أو} \\ n=5 \text{ مقبول} \end{array} \right\} \quad \text{تكافئ}$$

نتيجة : $9 C_n^2 = 2 C_{2n}^2$ من أجل $n=5$

$$\begin{cases} n \geq 3 ; 2n \geq 2 \\ \frac{n!}{(n-3)! 3!} + \frac{(2n)!}{(2n-2)! 2!} = 8n \dots\dots\dots (1) \end{cases} \quad \text{يكافئ } C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n \quad (c)$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} + \frac{2n(2n-1)}{2} = 8n \quad \text{تكافئ } (1)$$

$$n(n-1)(n-2) + 3 \times 2n(2n-1) = 6 \times 8n \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n^2 - 3n + 2) + 12n^2 - 6n = 48n \quad \text{تكافئ}$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n + 12n^2 - 6n - 48n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n^3 + 9n^2 - 52n = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n(n^2 + 9n - 52) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$n \neq 0 \text{ لأن } n^2 + 9n - 52 = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\Delta = 81 + 208 = 289 = (17)^2$$

$$n_1 = \frac{-9 - 17}{2} = -8 \quad \text{مرفوض}$$

$$n_2 = \frac{-9 + 17}{2} = 4 \quad \text{مقبول}$$

نتيجة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$ من أجل $n=4$

التمرين 22

n و m عدلان طبيعيين حيث $n \geq 2$ و $n-2 \geq m$

أثبت صحة المساواة التالية :

$$C_{2n}^n = 2 C_{2n-1}^{n-1} \quad - 1$$

$$C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2 C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m \quad - 2$$

الحل - 22

$$2 C_{2n-1}^{n-1} = 2 \times \frac{(2n-1)!}{(2n-1-n+1)! (n-1)!} \quad - 1$$

$$= 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)!}$$

$$= 2 \times \frac{(2n-1)!}{n! (n-1)!} \times \frac{2n}{2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!}$$

و هو المطلوب $= C_{2n}^n$

$$C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m = C_{n-2}^{m-2} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$$

$$= C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$= C_n^m$$

ملاحظة : استعملت خاصية مثلث باسكال : $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = C_n^m$

تمرين 23

في IN^2 الجمل التالية ذات المجهولين x و y

$$\begin{cases} 2C_x^2 = C_y^1 \\ C_{x+y}^2 = 4 \end{cases} \quad -2 \quad \begin{cases} C_{x+1}^y = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$$

حل 23

$$\begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x+1 \geq y \\ x+y \geq 2 \\ x > y-1 \\ C_x^1 = C_{x-1}^{1-1} \dots (1) \\ C_{x+y}^2 = 10 \dots (2) \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} C_{x+1}^1 = C_x^{1-1} \\ C_{x+y}^2 = 10 \end{cases}$$

$$\frac{(x+y)!}{(x+y-2)!2!} = 10 \quad \text{كافئ}$$

$$\frac{(x+y)(x+y-1)}{2} = 10 \quad \text{كافئ}$$

$$(x+y)(x+y-1) = 20 \quad \text{كافئ}$$

$$x+y=5 \quad \text{كافئ} \quad \text{لأن التحليل الممكن لـ } 20 \text{ من الشكل } n(n-1) \text{ هو } 5 \times 4$$

$$\frac{(x+1)!}{(x-y+1)!y!} = \frac{x!}{(x-y+1)!(y-1)!} \quad \text{كافئ}$$

$$\frac{(x+1)!}{y!} = \frac{x!}{(y-1)!} \quad \text{كافئ}$$

$$\frac{(x+1)x!}{y(y-1)!} = \frac{x!}{(y-1)!} \quad \text{كافئ}$$

$$\frac{x+1}{y} = 1 \quad \text{كافئ}$$

$$x+1=y \quad \text{كافئ}$$

$$x-y=-1 \quad \text{كافئ}$$

$$\text{ملاحظة : } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \text{ منه بالحجم : } 2x=4 \text{ أي } x=2$$

بالتعويض في أحد المساواة : $x+y=5$ أي $2+y=5$ منه $y=3$

$$(2-x)^5 = [2 + (-x)]^5$$

$$= C_5^0 (-x)^5 (2)^0 + C_5^1 (-x)^4 (2)^1 + C_5^2 (-x)^3 (2)^2 + C_5^3 (-x)^2 (2)^3 + C_5^4 (-x) (2)^4 + C_5^5 (2)^5$$

$$= -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$$

$$(2x+1)^6 = C_6^0 (2x)^6 + C_6^1 (2x)^5 + C_6^2 (2x)^4 + C_6^3 (2x)^3 + C_6^4 (2x)^2 + C_6^5 (2x) + C_6^6 (2x)^0$$

$$= 1 + 12x + 15 \times 4x^2 + 20 \times 8x^3 + 15 \times 16x^4 + 6 \times 32x^5 + 64x^6$$

$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

جـ 25 =

هو العدد المركب الذي طولته 1 و عـمته $\pi/2$

حب $(2-i)^7$ و $(2+i)^7$ ثم استنتج أن العدد $(2-i)^7 + (2+i)^7$ حقيقي

جـ 25 =

نعمل دستور ثانوي الحد لدينا :

$$(2+i)^7 = 2^7 + 7 \times 2^6 i + 21 \times 2^5 i^2 + 35 \times 2^4 i^3 + 35 \times 2^3 i^4 + 21 \times 2^2 i^5 + 7 \times 2 i^6 + i^7$$

$$= 2^7 + 7 \times 64 i - 21 \times 32 + 35 \times 16 i + 35 \times 8 - 21 \times 4 i - 14 - i$$

$$(2-i)^7 = [2 + (-i)]^7$$

$$= 2^7 + 7(-i)2^6 + 21(-i)^2 2^5 + 35(-i)^3 2^4 + 35(-i)^4 2^3 + 21(-i)^5 2^2 + 7(-i)^6 2 + (-i)^7$$

$$= 2^7 - 7 \times 64 i - 21 \times 32 + 35 \times 16 i + 35 \times 8 - 21 \times 4 i - 14 + i$$

$$(2+i)^7 + (2-i)^7 = 2[2^7 - 21 \times 32 + 35 \times 8 - 14]$$

إذن : العدد $(2+i)^7 + (2-i)^7$ حقيقي

جـ 26 =

عدد طبيعي غير معدوم . احسب المجاميع التالية بدلالة n .

$$c) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$$

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k \times 5$$

$$d) \sum_{k=0}^n C_n^k$$

$$b) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k$$

جـ 26 =

$$a) \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k \times 5^{n-k} = (3+5)^n = 8^n$$

$$b) \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \times (1)^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

$$c) \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

$$d) \sum_{k=0}^n C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k (1)^k (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

جـ 27 =

n و m عدنان طبيعيان حيث $n \geq m \geq 1$

اثبت ان $m C_n^m = n C_{n-1}^{m-1}$ ثم احسب $A = 1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + m C_n^m + \dots + n C_n^n$

اثبت ان : $m C_{n+1}^m = (n+1) C_n^{m-1}$ ثم احسب B حيث

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1} C_n^m + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

جـ 27 =

$$n C_{n-1}^{n-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

و هو المطلوب $= m C_n^m$

$$A = 1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + m C_n^m + (m+1) C_n^{m+1} + \dots + (n-1) C_n^{n-1} + n C_n^n$$

$$m C_n^m = n C_{n-1}^{m-1} \text{ لأن } = 1 + n C_{n-1}^1 + n C_{n-1}^2 + \dots + n C_{n-1}^{m-1} + n C_{n-1}^m + \dots + n C_{n-1}^{n-2} + n C_{n-1}^{n-1}$$

$$(1) \text{ حسب السؤال } = 1 + n(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1})$$

$$= 1 + n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k$$

$$= 1 + n [2^{n-1} - 1]$$

$$= 1 - n + n \times 2^{n-1}$$

$$A = 1 + 2 C_2^2 = 1 + 2 = 3$$

تحقيق : من أجل $n=2$

$$1 - 2 + 2 \times 2^1 = 1 + 4 = 3$$

من جهة اخرى

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k - 1$$

ملاحظة :

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1)^k (1)^{n-1-k} - 1$$

$$= (1+1)^{n-1} - 1$$

$$= 2^{n-1} - 1$$

$$(n+1) \times C_n^{m-1} = (n+1) \times \frac{n!}{(n-m+1)! (m-1)!}$$

- 2

$$= \frac{(n+1)!}{(n-m+1)! (m-1)!} \times \frac{m}{m}$$

$$= m \times \frac{(n+1)!}{(n-m+1)! m!}$$

و هو المطلوب $= m C_{n+1}^m$

$$C_{n+1}^m = \frac{n+1}{m} C_n^{m-1} \text{ منه } m C_{n+1}^m = (n+1) C_n^{m-1} \text{ لدينا :}$$

$$\frac{1}{n+1} C_{n+1}^m = \frac{1}{m} C_n^{m-1} \text{ اي}$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{m+1} C_n^m + \dots + \frac{1}{n} C_n^{n-1} + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3 + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{m-1} + \dots + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^n + \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{n+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} (C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^n)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1)$$

$$= 1 + \frac{1}{n+1} [2^{n+1} - 1 - (n+1)]$$

$$\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

ملاحظة : استعملنا المساواة :

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$1 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$$

إذن :

$$C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} - 1 - C_{n+1}^1$$

منه :

$$B = 1 + \frac{1}{2} C_2^1 + \frac{1}{3} C_3^2 = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

من جهة اخرى :

$$\frac{2^1 - 1}{3} = \frac{7}{3}$$

تمرين - 28

$n \geq m > 0$ عدنان طبيعيا حيث

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m \quad 1 - \text{اثبت أن}$$

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1} \quad 2 - \text{استنتج أن}$$

تحليل - 28

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m &= \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \times \frac{m}{m} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} \times \frac{(n-m)}{(n-m)} \\ &= \frac{m(n-1)!}{(n-m)!m!} + \frac{(n-m)(n-1)!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{(n-1)! [m + n - m]}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!} \end{aligned}$$

$$C_n^m = \text{وهو المطلوب}$$

- - حسب السؤال الأول لدينا مايلي :

$$\begin{aligned} \oplus \quad C_{n+1}^{m+1} &= C_n^m + \cancel{C_n^{m+1}} \\ \oplus \quad \cancel{C_n^{m+1}} &= C_{n-1}^m + \cancel{C_{n-1}^{m+1}} \\ \oplus \quad \cancel{C_{n-1}^{m+1}} &= C_{n-2}^m + \cancel{C_{n-2}^{m+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oplus \quad C_{m+3}^{m+1} &= C_{m+2}^m + \cancel{C_{m+2}^{m+1}} \\ \oplus \quad \cancel{C_{m+2}^{m+1}} &= C_{m+1}^m + \cancel{C_{m+1}^{m+1}} \end{aligned}$$

جمع هذه المساواة طرف لـ طرف
حصل على :

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m + C_{n-2}^m + \dots + C_{m+2}^m + C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1}$$

$$C_{m+1}^{m+1} = C_m^m = 1 \quad \text{لأن} \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m + \dots + C_{m+1}^m + C_{m+1}^{m+1} \quad \text{أي :}$$

تمرين - 29

- المنشور $(x^3 - \frac{2}{x^2})^{15}$ حيث $x \in \mathbb{R}^*$

- اكتب الحد الذي درجته 10

- اوجد معامل الحد التاسع

- اوجد الحد الثابت

الحل - 29

$$\begin{aligned}
 \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{15} &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{3k} (-1)^{15-k} \left(\frac{2}{x}\right)^{15-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{3k} (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{2k-30} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{3k+2k-30} \\
 &= \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (-1)^{15-k} (2)^{15-k} (x)^{5k-30}
 \end{aligned}$$

1 - الحد ذو الدرجة 10 من أجل : $5k - 30 = 10$
أي : $5k = 40$ منه $k = 8$

إذن : الحد هو : $C_{15}^8 (-1)^{15-8} (2)^{15-8} x^{10}$

$$C_{15}^8 = \frac{15!}{7!8!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 6435$$

منه : الحد ذو الدرجة 10 هو : $-6435 \times 2^7 x^{10} = -823680 x^{10}$

2 - الحد التاسع هو الحد ذو $k = 8$ (لأن k يأخذ القيم من 0 إلى 15)

منه الحد هو : $-823680 x^{10}$ أي معامل الحد التاسع هو -823680

3 - يكون الحد ثابت من أجل : $5k - 30 = 0$ أي $k = 6$

منه الحد الثابت هو : $C_{15}^6 (-1)^{15-6} (2)^{15-6}$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{9!6!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 5005$$

منه الحد الثابت هو : $-5005 \times 2^9 = -2562560$

التمرين - 30

n عدد طبيعي غير معدوم . ليكن المنشور $(1+x)^n$ حيث $x \in \mathbb{R}$

1 - عين قيمة n حتى يكون الحد الثالث في المنشور هو $28x^2$

2 - من أجل قيمة n المحصل عليها عين x حتى يكون الحد الخامس هو 1120

3 - نضع $n = 15$

عين قيمة العدد الطبيعي m حتى يكون الحدان اللذان رتبتهما $(m-1)$ و $(2m+3)$ متساويي المعامل .

الحل - 30

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \quad - 1$$

الحد الثالث من أجل $k = 2$ هو : $C_n^2 x^2$

إذن : $C_n^2 x^2 = 28 x^2$ يكافئ $C_n^2 = 28$

$$\frac{n!}{(n-2)! 2!} = 28 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 28 \quad \text{يكافئ}$$

$$n(n-1) = 56 \quad \text{يكافئ}$$

$$n^2 - n - 56 = 0 \quad \text{يكافئ}$$

$$\Delta = 1 + 224 = 225 = (15)^2$$

$$n_1 = \frac{1-15}{2} = -7 \quad \text{مرفوض}$$

$$n_2 = \frac{1+15}{2} = 8 \quad \text{مقبول}$$

نتيجة : $n = 8$

$$C_8^4 x^4 = \frac{8!}{4!4!} x^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} x^4 = 70 x^4 \text{ هو الحد الخامس } n=8 \text{ من أجل}$$

$$x^4 = 16 \quad \text{إذن : } 70 x^4 = 1120 \text{ يكافئ}$$

$$x = \sqrt[4]{16} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : توجد قيمتين لـ x حتى يكون الحد الخامس هو 1120 و هما $\{-2; 2\}$
 3- من أجل $n=15$

$$C_{15}^{m-2} x^{m-2} \text{ هو الحد ذو الرتبة } m-1 \text{ من أجل } k=m-2$$

$$C_{15}^{2m+2} x^{2m+2} \text{ هو الحد ذو الرتبة } 2m+3 \text{ من أجل } k=2m+2$$

$$C_{15}^{m-2} = C_{15}^{2m+2} \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{array}{l} m-2 = 2m+2 \\ \text{أو} \\ m-2 = 15 - (2m+2) \\ \text{أو} \\ 2m+2 = 15 - (m-2) \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} -m = 4 \\ \text{أو} \\ m-2 = 15 + 2m+2 \\ \text{أو} \\ 2m+2 = 17 - m \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = -4 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ m = -19 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ m = 5 \end{array} \right\} \quad \text{يكافئ}$$

$$m = 5 \quad \text{يكافئ}$$

تمرين - 31

من المتغير العشوائي المعروف كما يلي :

α	-1	2	3	4
$p(X = \alpha)$	1/3	1/4	1/5	a

- عين قيمة العدد الحقيقي a

- احسب $P(X \geq 5/2)$ ثم $P(X < 1)$

- احسب $p(X^2 \leq 2)$

- احسب $p(X^2 - 6X + 8 < 0)$

حسب - 31

$$\frac{20 + 15 + 12}{60} + a = 1 \quad \text{منه} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + a = 1$$

$$\frac{47}{60} + a = 1 \quad \text{أي :}$$

$$a = 1 - \frac{47}{60} \quad \text{أي :}$$

$$a = \frac{13}{60} \quad \text{أي :}$$

$$p(X \geq 5/2) = p(X = 3) + p(X = 4)$$

$$= \frac{1}{5} + a$$

$$\frac{1}{5} + \frac{13}{60}$$

$$\frac{25}{60}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$p(X < 1) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$p(X^2 \leq 2) = p(X = -1) = \frac{1}{3}$$

— 3

— 4

X	-1	2	3	4
X ²	1	4	9	16
-6X	6	-12	-18	-24
X ² - 6X + 8	15	0	-1	0

$$p(X^2 - 6X + 8 < 0) = p(X = 3) = \frac{1}{5} \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين — 32

يحتوي كيس على 5 كرات تحمل الرقم 10 و 3 كرات تحمل الرقم 15
نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس
X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المسحوبين .

1 — ما هي القيم الممكنة للمتغير X

2 — عرف قانون احتمال المتغير X

3 — احسب E(X) الأمل الرياضي للمتغير X

4 — احسب التباين Var(X)

5 — احسب p(X ≥ 25)

الحل — 32

— 1

إذن : القيم الممكنة لـ X هي {20 ; 25 ; 30}

⊕	10	15
10	20	25
15	25	30

$$C_8^2 = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

2 — عدد الحالات الممكنة للسحب

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \quad \text{عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 10 : 10}$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3 \quad \text{عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين تحملان الرقم 15 : 15}$$

$$C_5^1 \times C_3^1 = 5 \times 3 = 15 \quad \text{عدد الحالات الملائمة لسحب كرة تحمل 15 و أخرى تحمل 10 : 15}$$

$$\text{منه : } p(X = 30) = 3/28 \quad ; \quad p(X = 25) = 15/28 \quad ; \quad p(X = 20) = 10/28$$

إذن : قانون احتمال المتغير X هو كمايلي :

α	20	25	30
p(X = α)	10/28	15/28	3/28

$$E(X) = 20\left(\frac{10}{28}\right) + 25\left(\frac{15}{28}\right) + 30\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{200 + 375 + 90}{28} = 23,75 \quad \text{— 3}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{10}{28}(3,75)^2 + \frac{15}{28}(1,25)^2 + \frac{3}{28}(6,25)^2 = 10,04 \quad \text{— 4}$$

$$p(X \geq 25) = p(X = 25) + p(X = 30) \quad \text{— 5}$$

$$= \frac{15}{28} + \frac{3}{28}$$

$$\frac{18}{28}$$

$$= \frac{9}{14}$$

تمرين - 33

حوي صندوق على 3 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 3 كرات سوداء مرقمة 1 ، 2 ، 3 .
 سحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق .

عـ X المتغير العشوائي الذي يرفق الكرة البيضاء بالرقم (+1) و الكرة السوداء بـ 0
 عـ Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل كرة الرقم الذي تحمله .

- عرف قانون احتمال كل من X و Y

- احسب $E(X)$ و $E(Y)$

- أثبت أن المتغيران X و Y مستقلان

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي T حيث $T = XY$ ثم احسب $E(T)$

حـ 33

- نقيم الممكنة لـ X هي $\{0; 1\}$

X_i	0	1
$p(X = X_i)$	1/2	1/2

$$p(X = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

نقيم الممكنة لـ Y هي $\{1; 2; 3\}$

Y_i	1	2	3
$p(Y = Y_i)$	1/3	1/3	1/3

$$p(Y = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(Y = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(Y = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 2) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 0) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 0; Y = 3) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 2) = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{و} \quad p(X = 1; Y = 3) = \frac{1}{6}$$

حـ : من أجل كل $i \in \{0; 1\}$ ، من أجل كل $k \in \{1; 2; 3\}$

إذن : المتغيران X و Y مستقلان $p(X = i) \times p(Y = k) = p(X = i; Y = k)$

4 - نضع $T = XY$ إذن : القيم الممكنة لـ T هي $\{0:1:2:3\}$

T_i	0	1	2	3
$p(T = T_i)$	1/2	1/6	1/6	1/6

$$E(T) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1+2+3}{6} = 1 \quad \text{منه :}$$

التمرين - 34

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، a حيث $a \in \mathbb{N}$

نسحب كرة واحدة من الكيس . نضع P_k احتمال سحب الكرة ذات الرقم k (السحب ليس متساوي الاحتمال)

1 - احسب P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a علما انها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$

2 - ليكن F المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمله . اوجد قيمة العدد الطبيعي a حتى يكون

$$E(F) = \frac{43}{9} \quad \text{الأمـل الرياضيـاتي للمتغير F هو}$$

الحـل - 34

$$P_1 + \left(P_1 + \frac{1}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{2}{18}\right) + \left(P_1 + \frac{3}{18}\right) = 1 \quad \text{إذن :} \quad P_a + P_3 + P_2 + P_1 = 1 \quad 1 -$$

$$4P_1 + \frac{6}{18} = 1 \quad \text{أي :}$$

$$4P_1 = 1 - \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

$$P_1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad \text{أي :}$$

$$P_1 = \frac{1}{6} \quad \text{نتيجة :}$$

$$P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P_3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

$$P_a = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

2 - قانون المتغير العشوائي F هو كمايلي :

F_i	1	2	3	a
$P(F = F_i)$	1/6	2/9	5/18	1/3

$$E(F) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{5}{18}\right) + a\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{9} + \frac{15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{3+8+15}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{26}{18} + \frac{a}{3}$$

$$= \frac{13}{9} + \frac{a}{3}$$

$$\frac{13}{9} + \frac{a}{3} = \frac{43}{9} \quad \text{يكافئ} \quad E(F) = \frac{43}{9} \quad \text{نتيجة :}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{43}{9} - \frac{13}{9} \quad \text{يكافئ}$$

a = 30	يكفي
a = 9	
9 a = 90	يكافي
a = 10	يكافي

التمرين - 35

يحتوي كيس على 20 كرات مرقمة من 1 إلى 20 لا نفرق بينها عند اللمس (I) نسحب من الكيس كرة واحدة . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) الحصول على مضاعف 4

(B) كرة تحمل عددا ليس مضاعفا 5

(II) نسحب من الكيس كرتين في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) كرتين تحملان مضاعفا 4

(B) كرة تحمل مضاعف 3 و أخرى تحمل مضاعف 4

(III) نسحب الآن 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) ثلاث كرات مضاعفات 4

(B) ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي

حـل - 35

مضاعفات 4 هي {20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4}

الأرقام غير مضاعفات 5 هي {19 ; 18 ; 17 ; 16 ; 14 ; 13 ; 12 ; 11 ; 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1}

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \text{جـة :}$$

$$P(B) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{18!2!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190 \quad \text{عدد الحالات الممكنة هو}$$

مضاعفات 4 : {20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4}

مضاعفات 3 : {18 ; 15 ; 12 ; 9 ; 6 ; 3}

$$P(A) = \frac{C_4^2}{190} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{190} = \frac{\frac{5 \times 4}{2}}{190} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19} \quad \text{جـة :}$$

لاحظ أن العدد 12 مضاعف لكل

من 3 و 4 إذن نميز 3 حالات

كالتالي :

مضاعف 3 و مضاعف 4 مختلفين عن 12

12 و مضاعف 4 مخيف عن 12

12 و مضاعف 3 مختلف عن 12

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{C_4^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_5^1 + C_1^1 \times C_4^1}{190} \\ &= \frac{4 \times 5 + 1 \times 5 + 1 \times 4}{190} \\ &= \frac{20 + 5 + 4}{190} \\ &= \frac{29}{190} \end{aligned}$$

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2} = 1140 \quad \text{عدد الحالات الممكنة :}$$

$$P(A) = \frac{C_5^3}{1140} = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}$$

سحب 3 كرات مجموع أرقامها زوجي يوافق أحد الحالات التالية :

سحب 3 أرقام زوجية
 سحب رقمين فرديين و رقم زوجي علما أن } عدد الأرقام الفردية هو : 10
 عدد الأرقام الزوجية هو : 10
 إذن :

$$P(B) = \frac{C_{10}^3 + C_{10}^2 \times C_{10}^1}{1140} = \frac{120 + 45 \times 10}{1140} = \frac{570}{1140} = \frac{57}{114} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}$$

التمرين - 36

يحتوي كيس على 10 كرات متماثلة الاحتمال موزعة كمايلي :

5 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3

3 كرات خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3

2 كرات حمراء تحمل الأرقام 3 ، 3

نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) الحصول على كرة بيضاء و كرتين حمراوين

(B) الحصول على كرة حمراء على الأقل

(C) الحصول على كرات مجموع أرقامها أكبر تماما من 7

الحل - 36

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$$

عدد الحالات الممكنة :

$$C_5^1 \times C_2^2 = 5 \times 1 = 5$$

عدد الحالات الملائمة للحادثة A هو :

$$P(A) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

منه .

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

عدد الحالات الملائمة للحادثة B هو 56 (و لا كرة حمراء)

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{56}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

منه :

يكون مجموع الأرقام المسحوبة أكبر تماما من 7 إذا و فقط اذا تم سحب 3 كرات تحمل الرقم 3 أو 2 كرات تحمل الرقم 3 و كرة تحمل الرقم 2

$$C_4^3 + C_4^2 \times C_3^1 = 4 + 6 \times 3 = 22$$

إذن : عدد الحالات الملائمة هو :

$$P(C) = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$$

منه :

التمرين - 37

في سباق 400 متر تتابع كل فريق يتكون من 4 عدائين

يريد المدرب تشكيل فريق للمشاركة في المسابقة من بين 10 عدائين حيث يتم تحديد رتبة انطلاق كل عداء من العدائين الأربعة المشكلين للفريق

1 - كم من فريق مختلف يمكن للمدرب تشكيله

2 - ما هو احتمال أن يكون عداء ما ضمن الفريق المختار

الحل - 37

1 - عند اختيار 4 عدائين نهتم بترتيبهم حسب الانطلاق

إذن : عدد الحالات الممكنة هي تراتيب لـ 4 عناصر من بين 10 عناصر و عددها :

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

2 - عدد الحالات الملائمة للحادثة "الفريق لا يضم لاعب معين" هو A_9^4 (الحادثة العكسية)

$$A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

أي :

منه : احتمال ان يكون الفريق يضم لاعب معين هو :

$$1 - \frac{3024}{5040} - \frac{2016}{5040} = \frac{2}{5}$$

تمرين - 38

في ثانوية ما 25% من التلاميذ مستواهم ضعيف في مادة الرياضيات و 15% منهم مستواهم ضعيف في مادة الفيزياء و 10% منهم مستواهم ضعيف في مادتي الرياضيات و الفيزياء معا .

نختار عشوائيا تلميذا واحدا من هذه الثانوية .

1 - إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا أيضا في مادة الرياضيات ؟ .

2 - إذا كان هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الرياضيات فما هو احتمال أن يكون مستواه ضعيفا في مادة الفيزياء أيضا ؟ .

3 - ما هو احتمال ان يكون هذا التلميذ ذو مستوى ضعيف في مادة الفيزياء او في مادة الرياضيات

نحل - 38

سن الحوادث التالية :

: التلميذ ضعيف في مادة الرياضيات

: التلميذ ضعيف في مادة الفيزياء

- احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الرياضيات علما أنه ضعيف في الفيزياء هو :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{15}{100}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

- احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزياء علما أنه ضعيف في الرياضيات هو :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

- احتمال أن يكون التلميذ ضعيف في احدى المادتين الرياضيات أو الفيزياء هو :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100} \\ &= \frac{25 + 15 - 10}{100} \\ &= \frac{30}{100} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

تمرين - 39

عند صندوق 3 قطع نقدية موزعة كمايلي :

قطعة الأولى تحمل وجه و ظهر متساوي الاحتمال

قطعة الثانية تحمل وجهين (لا تحمل ظهر)

قطعة الثالثة تحمل وجه و ظهر حيث احتمال ظهور الوجه هو 1/3

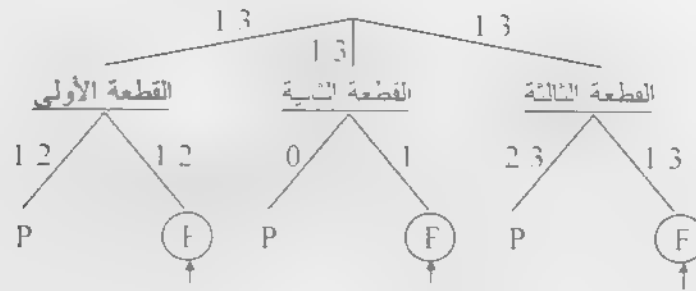
نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق ثم نرميها مرة واحدة

- هو احتمال الحصول على وجه

نحل - 39

- نرسم الشجرة التالية :

- نرسم الشجرة التالية :



نتيجة : احتمال الحصول على الوجه F هو :

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3+6+2}{18} = \frac{11}{18}$$

ملاحظة : القطعة الثانية لا تحمل ظهر إذن $P(F) = 1$ و $P(P) = 0$

التمرين = 40

A ، B ، C ثلاث صناديق حيث :

الصندوق A مكون من 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء

الصندوق B مكون من 2 كرات حمراء و كرة سوداء

الصندوق C مكون من 2 كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نأخذ أحد الصناديق عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة

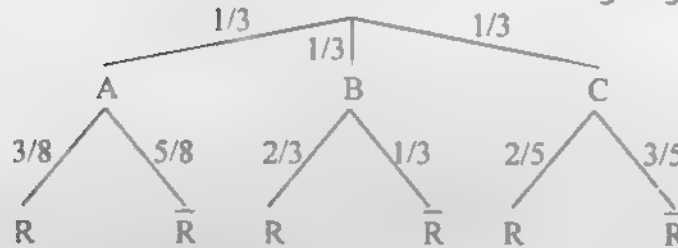
إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو احتمال ان تكون قد سحبت من الصندوق A ؟

الحل = 40

لتكن A : الحادثة اختيار الصندوق A إذن : $P(A) = 1/3$

لتكن R : الحادثة سحب كرة حمراء

لدينا الشجرة التالية :



احتمال سحب الكرة من الصندوق A علما أنها حمراء هو الاحتمال الشرطي

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)}$$

$$p(A \cap R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

لدينا :

$$P(R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{8} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{45 + 80 + 48}{120} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{173}{120}$$

$$P_R(A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{3 \times 120}} = \frac{1}{8} \times \frac{3 \times 120}{173} = \frac{45}{173}$$

نتيجة :

تمرين - 41

صندوق كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين
تسحب من الكيس كرتين على التوالي دون إرجاع
نرمز بـ B_1 للحادثة الكرة المسحوبة في المرة 1 بيضاء
1 - أحسب الاحتمال $P(B_1)$ ثم $P_{B_1}(B_2)$
2 - استنتج $P(B_2 \cap B_1)$

حليل - 41

$$P(B_1) = \frac{10}{12} \quad \text{— (سحب كرة أولى بيضاء)}$$

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{9}{11} \quad \text{— (سحب كرة بيضاء في المرة الثانية علما ان الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء إلى تبقى 9 كرات بيضاء من بين 11 كرات)}$$

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} \quad \text{— لدينا :}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) \quad \text{— منه .}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{11} \times \frac{10}{12} \\ &= \frac{90}{132} \\ &= \frac{15}{22} \end{aligned}$$

نماذج للبكالوريا

التمرين 1 -

يحتوي صندوق على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

(I) ن سحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد . ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء . C : الحصول على كرة بيضاء على الأقل

B : الحصول على 3 كرات سوداء .

(II) ن سحب 4 كرات في آن واحد . أحسب ل احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء

B : الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء .

(III) ن سحب 3 كرات في آن واحد ولا نعيدها إلى الصندوق ثم ن سحب من الباقي 4 كرات في آن واحد .

ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة الأولى بيضاء و من بين الكرات الأربعة المسحوبة بعد ذلك كرة واحدة بيضاء فقط

الحل - 1

(I) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

$$P(A) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{1}{120} \times \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{120 \times 3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

(II) عدد الحالات الممكنة هو : $C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$

$$P(A) = \frac{C_6^3 \times C_4^1}{210} = \frac{20 \times 4}{210} = \frac{8}{21}$$

$$P(B) = \frac{C_4^3 \times C_6^1}{210} = \frac{4 \times 6}{210} = \frac{4}{35}$$

(III) احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى هو : $\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

بعد الحصول على 3 كرات بيضاء يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء

إذن : احتمال سحب كرة واحدة بيضاء عند سحب 4 كرات في آن واحد هو :

$$\frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} = \frac{3 \times 4}{35} = \frac{12}{35}$$

نتيجة : احتمال سحب 3 كرات بيضاء في المرة الأولى و كرة واحدة بيضاء في المرة الثانية هو :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{12}{35} = \frac{2}{35}$$

التمرين 2 -

يحتوي صندوق على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10

ن سحب من الصندوق كرتين على التوالي مع الارجاع

1 - أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4

2 - أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10

تحليل - 2

١- الحالات الممكنة للسحب هي قوائم لـ عنصرين من بين 10 عناصر و عددها $10^2 = 100$

٢- لنكن A الحادثة : سحب كرتين فرقهما 4

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي $(1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 7), (7, 3), (4, 8), (8, 4), (9, 5), (5, 9), (10, 6), (6, 10)$

$$P(A) = \frac{12}{100} \quad \text{منه :}$$

٣- لنكن B الحادثة : سحب كرتين مجموعهما 10

الحالات الملائمة للحادثة B هي $(1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 7), (7, 3), (4, 6), (6, 4), (5, 5)$

$$P(B) = \frac{9}{100} \quad \text{منه (1, 9)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{100} \quad \text{منه (3, 7), (7, 3) هي } A \cap B$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{100}} = \frac{2}{9} \quad \text{حجة :}$$

ع فقط .

تمرين - 3

تكون قسم من 25 % بنات و 75 % ذكور
محص أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدين .
جد عشوائيا تلميذا من القسم . ما هو احتمال الحوادث التالية :

١ : أن يكون التلميذ بنتا

٢ : أن يكون التلميذ ولدا

٣ : أن يكون التلميذ جيدا

٤ : أن يكون التلميذ بنتا علما أنها عنصر جيد

حل - 3

$$P(A) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) \quad \text{(بنت جيدة أو ولد جيد)}$$

$$= \frac{25}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{75}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{6+9}{40}$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$P(D) = \frac{2}{5} \quad \text{منه } P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{5}$$

التمرين 4 -

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 و 3 كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين مرقمة من 9 إلى 10

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : الكرتان تحملان رقمين فرديين

B : الكرتان من نفس اللون

C : الكرتان تحملان رقمين فرديين و من نفس اللون

D : الكرتان من لونان مختلفان

E : الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين

الحل - 4

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \quad \text{عدد الحالات الممكنة هو}$$

الألوان	بيضاء	حمراء	خضراء
الأرقام	5, 4, 3, 2, 1	8, 7, 6	10, 9
عدد الأرقام الفردية	3	1	1

$$P(A) = \frac{C_5^2}{45} = \frac{1}{45} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{45 \times 2} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$P(B) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{45} = \frac{10 + 3 + 1}{45} = \frac{14}{45}$$

$$P(C) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

لاحظ أن يوجد 3 كرات بيضاء تحمل أرقام فردية

إذن : لا يمكن سحب كرتين خضراوين أو حمراوين و تحملان أرقام فردية

$$P(D) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 + C_5^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1}{45} = \frac{5 \times 3 + 5 \times 2 + 3 \times 2}{45} = \frac{31}{45}$$

$$P(E) = \frac{C_3^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{45} = \frac{3 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 1}{45} = \frac{7}{45}$$

تفسير : حتى تكون الكرات مختلفة الألوان و تحمل أرقام فردية يجب أن تكون : (بيضاء فردية ، حمراء فردية) أو (بيضاء فردية ، خضراء فردية) أو (حمراء فردية ، خضراء فردية)

التمرين 5 -

A ، B ، C ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :

في الصندوق A : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء

في الصندوق B : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

في الصندوق C : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء

يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 أوجه مرقمة و متساوية الاحتمال .

إذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق A

إذا كان الرقم الظاهر 2 أو 3 يسحب من الصندوق B

إذا كان الرقم الظاهر 4 أو 5 أو 6 يسحب من الصندوق C

(I) إذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط ، أحسب احتمال أن تكون بيضاء

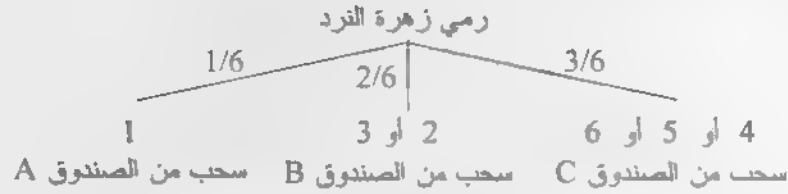
(II) إذا كان اللاعب يسحب كرتان في آن واحد . أحسب احتمال الحوادث التالية :

X : كرتين بيضاوين

Y : كرتين سوداوين من الصندوق B .

حل - 5

شجرة التالى :



احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو مجموع ثلاث احتمالات كمايلي :

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق A

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق B

. أن تكون الكرة بيضاء من الصندوق C

حجة : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو كمايلي :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{36} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = \frac{5}{36} + \frac{3}{10} = \frac{25 + 54}{180} = \frac{79}{180}$$

الكرتان بيضاوين في حالتين فقط كمايلي :

كرتان بيضاوين من الصندوق A

كرتان بيضاوين من الصندوق B

منه احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو :

$$\begin{aligned}
 P(X) &= \frac{1}{6} \times \frac{C_5^2}{C_6^2} + \frac{2}{6} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{10}{15} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} \\
 &= \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \\
 &= \frac{19}{90}
 \end{aligned}$$

$$P(Y) = \frac{2}{6} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30} \quad \text{كرتين سوداوين من الصندوق B}$$

حل - 6

و ١ لاعبان لرمي الأسهم كل منهما يسدد سهمه نحو هدف دائري مقسم إلى 3 مناطق I ، II ، III . حيث كل

منطقة واحدة فقط من بين المناطق I ، II ، III

حصل إصابة الرامي X للمناطق I ، II ، III هي الترتيب 1/12 ، 1/3 و 7/12 أما احتمالات إصابة

الرامي Y للمناطق I ، II ، III فهي متساوية .

الرامي X سهمه ثلاث مرات متتابعة . أحصب احتمال الحوادث التالية :

- يصيب المنطقة III في كل رمية .

- يصيب المناطق I ، II ، III بهذا الترتيب .

يصيب المناطق I ، II ، III

- لأن احد الراميين X أو Y علما ان احتمال اختيار الرامي X هو ضعف احتمال اختيار الرامي Y

- حنة تسديد رمية واحدة ما هو احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III

الحل - 6

لدينا الحالات التالية للرامي X :

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة	الحادثة
I	I	I	
		II	
		III	
	II	I	
		II	
		III	a
	III	I	
		II	b
		III	
II	I	I	
		II	
		III	c
	II	I	
		II	
		III	
	III	I	d
		II	
		III	
III	I	I	
		II	e
		III	
	II	I	f
		II	
		III	
	III	I	
		II	
		III	g

نتيجة :

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{1728} \quad \text{منه : الحادثة g توافق الحادثة A}$$

$$P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{432} \quad \text{منه : الحادثة a توافق الحادثة B}$$

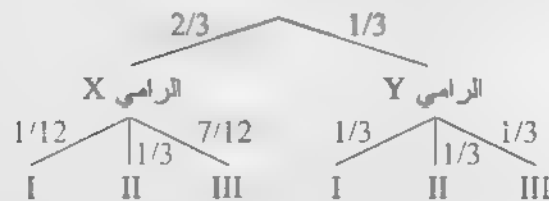
الحواث a ، b ، c ، d ، e ، f توافق الحادثة C

$$P(C) = 6 \times \left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} \right) = \frac{6 \times 7}{432} = \frac{7}{72}$$

باختيار أحد الراميين نضع α احتمال اختيار الرامي Y

$$\alpha + 2\alpha = 1 \quad \text{اي} \quad \alpha = 1/3$$

منه الشجرة التالية :



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{18} + \frac{1}{9} \\
 &= \frac{7+2}{18} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

احتمال أن تصيب الرمية المنطقة III هو :
تفسير : إما أن تكون الرمية من اللاعب X
أو تكون الرمية من اللاعب Y

تمرين - 7

نكن في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$ (1)

1- أوجد z_1, z_2, z_3 حلول المعادلة (1) ثم أكتبها على شكلها المتلثي .

2- عين الجذور التربيعية لكل من z_1, z_2, z_3

3- نرد متجانسة الأوجه كل وجه منها يحمل جذراً تربيعياً من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعين

4- ما هو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما

5- عرف قانون الاحتمال للمتغير X

6- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير X

حل - 7

1- لاحظ أن $z_1 = i$ هو حل للمعادلة $z^3 - 4z^2 + z - 4 = 0$

لنبحث عن الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - 4z^2 + z - 4 & z - i \\
 \hline
 z^3 - i z^2 & z^2 + (-4 + i)z - 4i \\
 \hline
 (-4 + i)z^2 + z - 4 & \\
 (-4 + i)z^2 + (4i + 1)z & \\
 \hline
 -4iz - 4 & \\
 -4iz - 4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

لنحل المعادلة $z^2 + (-4 + i)z - 4i = 0$

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 16 - 8i - 1 + 16i \\
 &= 15 + 8i \\
 &= (4 + i)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_2 = \frac{4 - i + 4 + i}{2} = 4 \\ z_1 = \frac{4 - i - 4 - i}{2} = -i \end{cases}$$

بجاء : $z_1 = -i, z_2 = 4, z_3 = i$

2- جذور z_1 هي : $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\}$

جذور z_2 هي : $\{2, -2\}$

جذور z_3 هي : $\left\{ \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i ; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\}$

3- احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان هو :

$$P = 3 \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \right) = \frac{1}{3}$$

تفسير : إما نحصل على جذر z_1 ثم الجذر الآخر $-z_1$ (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_2 ثم الجذر الآخر $-z_2$ (يمكن أن يكون نفسه)

أو نحصل على جذر z_3 ثم الجذر الآخر $-z_3$ (يمكن أن يكون نفسه)

ملاحظة : إذا سمينا على الترتيب a, b, c, d, e, f الجذور التربيعية للأعداد المركبة z_1, z_2, z_3 فإن الحالات الملائمة للحادثة هي :

$(a, a), (b, a), (a, b), (b, b), (c, c), (d, c), (d, d), (c, d), (e, e), (f, e), (f, f), (e, f)$ وعددها 12

و عدد الحالات الممكنة هو $6^2 = 36$

منه : الاحتمال المطلوب هو $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

4 - كل من الجذور التربيعية للأعداد z_1, z_2, z_3 طاولاتها على الترتيب 1, 2, 1
إن : القيم الممكنة لـ X هي 1, 2, 4 $(|z \cdot z'| = |z| \times |z'|)$

$$P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

تفسير : نمسح في المرة الأولى أحد الجذور وفي المرة الثانية أحد الجذور حيث جداء طاولتيهما يساوي قيمة X

$$P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

منه : قانون الاحتمال للمتغير X كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	4/9	4/9	1/9

$$E(X) = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

التمرين - 8

A و B صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :

الصندوق A : 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء

الصندوق B : 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A و نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق B

ثم نسحب من الصندوق B كرة أخرى و نسجل لونها

1 - ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

2 - ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

3 - نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي α و كل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل

سحب كرتين مجموع الأعداد المرقمة بها

(a) عرف قانون احتمال المتغير X ثم أحسب $E(X)$ (أمله الرياضي)

(b) عين α حتى يكون $E(X) = 1$

4 - نضيف إلى الصندوق B $(n-3)$ كرة سوداء حيث n عدد طبيعي أكبر من 3

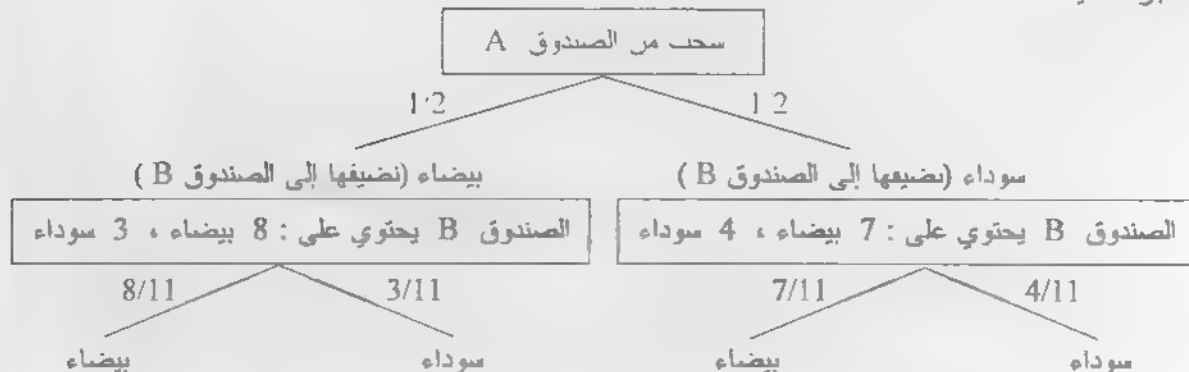
نعيد عملية السحب كما في السؤال (1)

(a) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين .

(b) عين قيمة n حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25

الحل - 8

لدينا الشجرة التالية :



نتيجة :

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} = \frac{4}{11}$$

1 - احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$$

2 - احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون هو

3 - القيم الممكنة لـ X هي $\{2\alpha; -2\alpha; 0\}$ حسب الحالات التالية :الكرتين بيضاوين : $\alpha + \alpha = 2\alpha$ الكرتين سوداوين : $-\alpha - \alpha = -2\alpha$ الكرتين مختلفتين في اللون : $\alpha - \alpha = 0$ (a) منه قانون احتمال المتغير x كمايلي :

X_i	0	-2α	2α
$P(X = X_i)$	5/11	2/11	4/11

$$P(X = 2\alpha) = \frac{4}{11} \quad \text{حسب السؤال الأول :}$$

$$P(X = -2\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

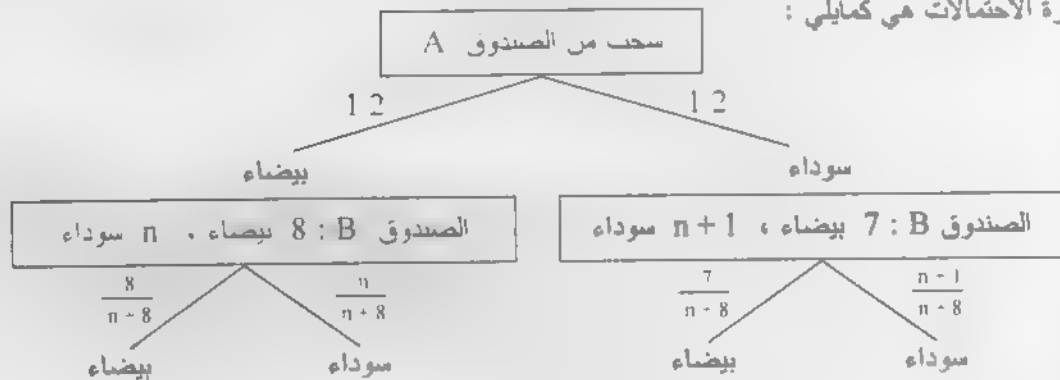
$$P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{11} + \frac{2}{11} \right) = \frac{5}{11} \quad \text{إذن :}$$

$$E(X) = 0 - 2\alpha \left(\frac{2}{11} \right) + 2\alpha \left(\frac{4}{11} \right) = \frac{-4\alpha + 8\alpha}{11} = \frac{4\alpha}{11} \quad \text{بجدة :}$$

$$\frac{4\alpha}{11} = 1 \quad E(X) = 1 \quad \text{يكافئ (b)}$$

$$4\alpha = 11 \quad \text{يكافئ}$$

$$\alpha = \frac{11}{4} \quad \text{يكافئ}$$

- نعيد عملية السحب بعد اضافة $(n-3)$ كرة سوداء إلى الصندوق B شجرة الاحتمالات هي كمايلي :

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{8}{n+8} = \frac{4}{n+8} \quad \text{(a) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين هو}$$

$$\frac{4}{n+8} = 0,25 \quad \text{يكافئ} \quad P = 0,25 \quad \text{(b)}$$

$$\frac{4}{n+8} = \frac{1}{4} \quad \text{يكافئ}$$

$$n+8 = 16 \quad \text{يكافئ}$$

$$n = 8 \quad \text{يكافئ}$$

بجدة : للحصول على احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي 0,25 يكفي أن يكون $n = 8$ $n - 3 = 8 - 3 = 5$ إذن يكفي أن نضيف 5 كرات سوداء إلى الصندوق B

التمرين - 9

(I) يسدد لاعب 3 رميات متتابعة نحو هدف

إذا علمت أن احتمال أن يصيب الهدف هو 0,7 أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يصيب الهدف 3 مرات

B : يصيب الهدف مرتين فقط

C : يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل

(II) إذا علمت أن الهدف مكون من 3 مناطق مختلفة I . II . III حيث احتمالات اصابتها هي على الترتيب

0,1 : 0,2 : 0,4 أحسب احتمال الحوادث التالية :

D : يصيب المنطقة I 3 مرات

E : كل رمية تصيب منطقة واحدة من بين المناطق الثلاثة

(III) يقوم اللاعب برمية واحدة فقط نرفق بكل رمية العلامة 10 إذا أصاب المنطقة I و العلامة 7 إذا أصاب المنطقة II

و العلامة 5 إذا أصاب المنطقة III و العلامة 0 إذا كانت الإصابة خارج المناطق الثلاث

ليكن f المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العلامة المحصل عليها .

عين قانون احتمال المتغير f ثم أمله الرياضياتي E(f)

الحل - 9

(I) نرسم جدول الرميات الثلاثة حيث نرسم بـ $\left. \begin{array}{l} 1 \text{ إذا أصاب الهدف .} \\ 0 \text{ إذا لم يصب الهدف .} \end{array} \right\}$

إذن : الحالات الممكنة هي كمايلي :

ملاحظة : احتمال أن لا يصيب الهدف هو $1 - 0,7 = 0,3$

الاحتمال	الحادثة	الرمية الثالثة	الرمية الثانية	الرمية الأولى
$0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,027$	a	0	0	0
$0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,063$	b	1	0	0
$0,3 \times 0,7 \times 0,3 = 0,063$	c	0	1	0
$0,3 \times 0,7 \times 0,7 = 0,147$	d	1	1	0
$0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$	e	0	0	1
$0,7 \times 0,3 \times 0,7 = 0,147$	f	1	0	1
$0,7 \times 0,7 \times 0,3 = 0,147$	g	0	1	1
$0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$	h	1	1	1

نتيجة :

$$P(A) = 0,343$$

الحالات الموافقة للحادثة A هي {h} منه

$$P(B) = 3 \times 0,147 = 0,441$$

الحالات الموافقة للحادثة B هي {g + f + d} منه

$$P(C) = 1 - 0,027 = 0,973$$

الحالات الموافقة للحادثة C هي {h + g + f + e + d + c + b} منه

$$P(D) = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$$

(II)

$$P(E) = 6 \times (0,1 \times 0,2 \times 0,4) = 0,024$$

تفسير : يوجد 6 حالات يصيب فيها المناطق الثلاث حسب ترتيب الرميات كمايلي

$$III \ II \ I + III \ I \ II + II \ III \ I$$

(III) قانون المتغير العشوائي f :

f_i	10	7	5	0
$P(f = f_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

$$E(f) = 10(0,1) + 7(0,2) + 5(0,4) + 0 = 1 + 1,4 + 2 = 4,4$$

التمرين - 10

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية اخرى . تنتهي

اللعبة إجباريا بعد 10 رميات أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا

1 - ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الأولى

2 - ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3 - إذا أراد اللاعب أن يكون احتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها

الحل - 10

1 - في الرمية الأولى ، احتمال الحصول على رقم فردي هو $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (3 أرقام فردية من بين 6)

2 - حتى تكون هناك رمية ثانية يجب أن تكون نتيجة الرمية الأولى هي رقم زوجي

إذن : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3 - تعميم : للحصول على رقم فردي في الرمية n يجب أن يتحصل اللاعب في كل من الرميات السابقة من 1 إلى (n-1) على رقم زوجي

منه : احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية n هو $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$

نتيجة : حتى يكون احتمال الحصول على رقم فردي أكبر من 0,03 يلزم و يكفي

أن يكون : $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,03$

أي : $\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] > \ln(0,03)$

أي : $n \ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln(0,03)$

أي : $-n \ln 2 > \ln 0,03$

أي : $n < \frac{\ln 0,03}{-\ln 2}$

أي : $n < 5,05$

منه : ينبغي للاعب أن لا يتجاوز 5 رميات

تمرين - 11

في دراسة خاصة لحالة سيارات مدينة معينة تبين أن : 12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % منها لها إضاءة ضعيفة من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % منها لها إضاءة ضعيفة سلامة الطرقات طلب من شرطة مرور هذه المدينة تكثيف مراقبة السيارات تكن الحوادث التالية :

L : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها إضاءة قوية و \bar{L} حادثتها العكسية

F : السيارة الموقوفة من طرف الشرطة لها مكابح قوية و \bar{F} حادثتها العكسية

1 - أحسب $P_F(\bar{L}) + P_{\bar{F}}(\bar{L}) + P(F)$

2 - احسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح ضعيفة و إضاءة ضعيفة أيضا

3 - احسب احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات مكابح قوية و إضاءة ضعيفة أيضا

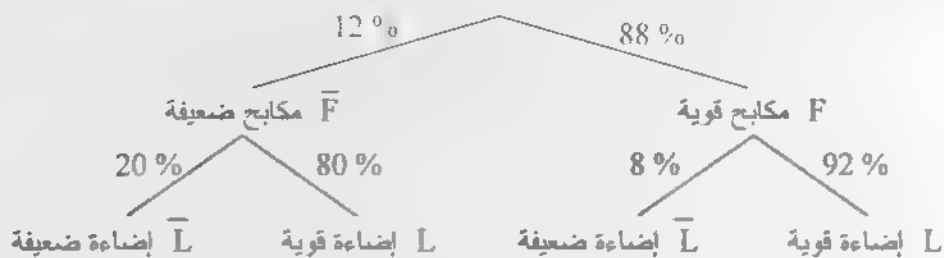
4 - استنتج احتمال أن تكون السيارة الموقوفة ذات إضاءة ضعيفة

5 - علما أن السيارة المراقبة لها إضاءة ضعيفة ما هو احتمال أن تكون ذات مكابح ضعيفة

6 - برهن أن احتمال توقيف سيارة في حالة جيدة (مكابح قوية و إضاءة قوية) هو 0,8096

الحل - 11

لنمثل هذه النسب المنوية على شكل شجرة كميلي :



منه النتائج التالية .

$$P(F) = 88\% = \frac{88}{100} = 0.88$$

— 1

$$P_{\bar{F}}(\bar{L}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{L})}{P(\bar{F})} = \frac{\frac{12}{100} \times \frac{20}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P_F(\bar{L}) = \frac{P(\bar{L} \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{88}{100} \times \frac{8}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

$$P(\bar{F} \cap \bar{L}) = \frac{12}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{3}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{125} \quad - 2$$

$$P(F \cap \bar{L}) = \frac{88}{100} \times \frac{8}{100} = \frac{22}{25} \times \frac{2}{25} = \frac{44}{625} \quad - 3$$

$$P(\bar{L}) = P(F \cap \bar{L}) + P(\bar{F} \cap \bar{L}) = \frac{3}{125} + \frac{44}{625} = \frac{15 + 44}{625} = \frac{59}{625} \quad - 4$$

$$P_{\bar{L}}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{\frac{3}{125}}{\frac{59}{625}} = \frac{3}{125} \times \frac{625}{59} = \frac{15}{59} \quad - 5$$

$$P(F \cap L) = \frac{88}{100} \times \frac{92}{100} = \frac{8096}{10000} = 0.8096 \quad - 6$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{التمرين 12} \\ (I) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \end{array}$$

1 — برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0 ; 1]$ 2 — (v_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* حيث $v_n = u_n - \alpha$ عي العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية3 — أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج أن u_n متقاربة و عي نهايتها(II) A و B كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداءالكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء

نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحدة ثم نعيدها إلى نفس الكيس

إذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة أخرى من نفس الكيس أما إذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الآخر و نعيد هذه التجربة n مرة .ليكن u_n احتمال أن تكون السحبة رقم n من الكيس A 1 — أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 2 — برهن أن من أجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0 ; 1\}$: $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ 3 — أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الحل — 12

(I) البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $u_n \in [0 ; 1]$ من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

من أجل $n = 2$: $u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$: الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $u_n \in [0; 1]$ من أجل $n > 2$

هل $u_{n+1} \in [0; 1]$ ؟

حسب فرضية التراجع : $u_n \in [0; 1]$ يكافئ

$$0 \leq \frac{2}{5}u_n \leq \frac{2}{5} \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{1}{5} \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{5} \quad \text{يكافئ}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{و خاصة}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \in [0; 1]$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha \quad - 2$$

$$= \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - \alpha$$

$$= \frac{2}{5}(u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha)$$

نتيجة : تكون (v_n) هندسية إ. و فقط إذا كان $v_n = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha$

$$u_n - \alpha = u_n + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha \quad \text{أي}$$

$$-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\alpha \quad \text{منه :}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{أي :}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{منه :}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{منه} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3} \quad \text{أخيرا}$$

خلاصة : (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{1}{6}$

$$v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad \text{إذن :}$$

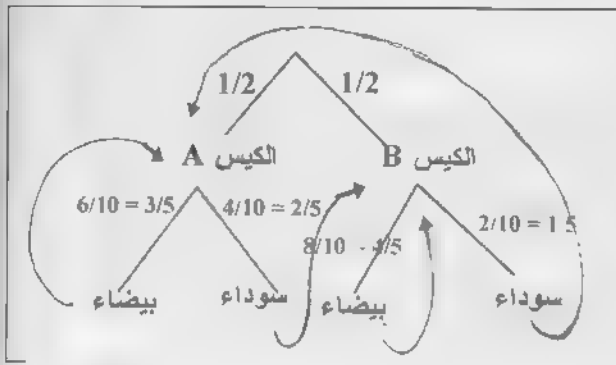
$$u_n = v_n + \frac{1}{3} \quad \text{لدينا :} \quad v_n = u_n - \frac{1}{3} \quad \text{منه}$$

$$v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \quad \text{منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3} \quad \text{أي :}$$

(II) لنمثل شجرة السحب كما يلي :



$$u_1 = \frac{1}{2}$$

- 1

$$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{3+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$u_3 = u_2 \times \frac{6}{10} + (1 - u_2) \times \frac{2}{10}$$

$$= \frac{3}{5} u_2 - \frac{1}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} u_2 + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4+5}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

 $u_n - 2$ هو احتمال السحب من الكيس A في السحب رقم nالبرهان بالتراجع : لتكن الخاصية : $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$ من أجل $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$

$$u_2 = \frac{2}{5}$$

من أجل $n=2$ لدينا

$$\frac{2}{5} u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{و}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n=2$

$$n > 2 \quad \text{نفرض أن} \quad u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5}$$

$$? \quad u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} \quad \text{هل}$$

نميز حالتين كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{السحب رقم } n \text{ من الكيس A : إذن : احتمال أن يكون السحب } (n+1) \text{ في الكيس A هو } \frac{6}{10} u_n = \frac{3}{5} u_n \\ \text{السحب رقم } n \text{ من الكيس B : إذن : احتمال أن يكون السحب } (n+1) \text{ في الكيس A هو } \frac{4}{10} (1 - u_n) = \frac{1}{5} (1 - u_n) \end{array} \right\}$$

$$u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + \frac{1}{5} (1 - u_n) \quad \text{منه :}$$

$$= \frac{3}{5} u_n - \frac{1}{5} u_n + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} \quad \text{منه الخاصية صحيحة من أجل } n+1$$

$$u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} + \frac{1}{5} : n \in \mathbb{N} - \{0; 1\} \quad \text{خلاصة : من أجل كل}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1/3 \quad \text{— 3 (حسب السؤال (3) من الجزء I)}$$

لأن (u_n) هي المتتالية المعرفة في الجزء I من التمرين .

التمرين - 13

A و B لاعبان يتباريان في اللعبة التالية :

في البداية يدفع كل من اللاعبين مبلغ 1 DA و يرمي كل منهما قطعة نقدية غير مزيفة تحتوي على وجه F و ظهر P
إذا حصل A على الوجه و B على الظهر تتوقف اللعبة بفوز A الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
إذا حصل A على الظهر و B على الوجه تتوقف اللعبة بفوز B الذي يأخذ المبلغ المدفوع (1 + 1)
في الحالات الأخرى يعتبر تعادلا و عليه يدفع اللاعبان مبلغ 1 DA ثم يبدآن من جديد رمي القطعة النقدية و هكذا تستمر
اللعبة حتى يفوز احد اللاعبين او يحدث التعادل في المرة العشرين حيث كل لاعب يستعيد المبلغ الذي دفعه
من أجل كل عدد طبيعي n حيث $1 \leq n \leq 20$ نعرف الحوادث التالية :

A_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز AB_n : اللعبة تنتهي في المحاولة n بفوز BI_n : المحاولة n هي تعادلنضع $Z_n = P(I_n) ; Y_n = P(B_n) ; X_n = P(A_n)$ 1 - أحسب Z_1 , Y_1 , X_1

$$2 - \text{برهن أن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } 1 \leq n \leq 19 : \left. \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right\}$$

$$3 - \text{استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } 1 \leq n \leq 20 : \left. \begin{aligned} X_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ Y_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ Z_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned} \right\}$$

4 - ليكن T المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنتهي اللعبة أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز
أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بتعادل .

إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون عندها $T = 2k$

1 - ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ T ؟

2 - أحسب $P(T = 40)$ 3 - أحسب $P(T = 2k)$ بدلالة k حيث k عدد طبيعي و $1 \leq k \leq 19$ ثم عين قانون احتمال المتغير T

تحليل - 13

1 - عند رمي اللاعبين A و B القطعة النقدية لدينا النتائج الممكنة كمايلي :

الاحتمال	التفسير	B	A
1/4	تعادل	F	F
1/4	فوز A	P	F
1/4	فوز B	F	P
1/4	تعادل	P	P

$$X_1 = P(A_1) = \frac{1}{4} \quad \text{منه النتائج التالية :}$$

$$Y_1 = P(B_1) = \frac{1}{4}$$

$$Z_1 = P(I_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{حالتين للتعادل حسب الجدول})$$

$$2 - \text{لتكن الخاصية : } \left. \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right\} \text{ من أجل } 1 \leq n \leq 19$$

البرهان بالتراجع :

$$\text{لدينا : } \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{4} P(I_1) \\ Y_2 &= \frac{1}{4} P(I_1) \\ Z_2 &= \frac{1}{2} P(I_1) \end{aligned} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{4} Z_1 \\ Y_2 &= \frac{1}{4} Z_1 \\ Z_2 &= \frac{1}{2} Z_1 \end{aligned} \right.$$

منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $X_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Y_{n+1} = \frac{1}{4} Z_n$ و $Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n$ من أجل $1 \leq n \leq 18$

$$\text{هل } Z_{n+2} = \frac{1}{2} Z_{n+1} \text{ ، } Y_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \text{ ، } X_{n+2} = \frac{1}{4} Z_{n+1} \text{ ؟}$$

$$\text{لدينا : } \left\{ \begin{aligned} X_{n+2} &= \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Y_{n+2} &= \frac{1}{4} P(I_{n+1}) \\ Z_{n+2} &= \frac{1}{2} P(I_{n+1}) \end{aligned} \right. \text{ أي } \left\{ \begin{aligned} X_{n+2} &= \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Y_{n+2} &= \frac{1}{4} Z_{n+1} \\ Z_{n+2} &= \frac{1}{2} Z_{n+1} \end{aligned} \right.$$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

$$\text{نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } 1 \leq n \leq 19 \left\{ \begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Y_{n+1} &= \frac{1}{4} Z_n \\ Z_{n+1} &= \frac{1}{2} Z_n \end{aligned} \right.$$

$$3 - Z_{n+1} = \frac{1}{2} Z_n \text{ إذن : } (Z_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 1/2 \text{ و حدها الأول } Z_1 = 1/2 \text{ منه } Z_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{أي } Z_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\text{نتيجة : } \left\{ \begin{aligned} X_n &= \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \\ Y_n &= \frac{1}{4} Z_{n-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \end{aligned} \right.$$

(II) 1 - يكون T أكبر ما يمكن إذا و فقط إذا انتهت اللعبة بالتعادل بعد 20 محاولة أي $k = 20$ منه $T = 40$

2 - يكون $T = 40$ (قيمة عظمى) إذا و فقط إذا كانت نتيجة الرمية 19 هو تعادل أي $P(T = 40) = Z_{19} = \left(\frac{1}{2} \right)^{19}$

3 - من أجل $1 \leq k \leq 19$ يكون $T = 2k$ إذا و فقط إذا كانت اللعبة قد انتهت بعد k محاولة

أي إما فوز A أو فوز B

$$P(T = 2k) = X_k + Y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k : \text{منه}$$

نتيجة : القيم الممكنة لـ T هي $2; 4; 6; \dots; 2k; \dots; 38; 40$
منه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي T هو كمايلي :

T_i	2	4	6	$2k$	38	40
$P(T = T_i)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$		$\left(\frac{1}{2}\right)^k$		$\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

تحقيق :

حتى تكون هذه النتائج صحيحة يلزم و يكفي أن يكون المجموع

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \text{ يساوي } 1$$

$$\text{لدينا : } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 1 : \text{منه}$$

حذار ! $P(T = 40)$ هو احتمال أن يكون التعادل في الرمية 19 مهما كانت النتيجة في الرمية 20

تمرين - 14

عشرة قريصات مرقمة من 1 إلى 10 . ن سحب منها 3 قريصات في آن واحد
هل عدد الحالات الممكنة للحصول على رقم زوجي واحد على الأقل هو :

(a) 180 (b) 330 (c) 110

تحليل - 14

عدد الأرقام الزوجية هو 5 و هي $\{2; 4; 6; 8; 10\}$

حصول على رقم زوجي على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة كل الأرقام فردية منه عدد الحالات الممكنة هو

$$C_{10}^3 - C_5^3 = 120 - 10 = 110$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (c) 110

تمرين - 15

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث :

$$P(A \cup B) = 0,35 ; P(B) = 0,5 ; P(A) = 0,4$$

هل قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ هي :

(a) 0,1 (b) 0,25 (c) المعطيات غير كافية للجواب

تحليل - 15

$$0,35 = 1 - P(A \cup B) : \text{منه } P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cup B) = 1 - 0,35 \quad \text{أي :}$$

$$P(A \cup B) = 0,65 \quad \text{أي :}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$0,65 = 0,4 + 0,5 - P(A \cap B) \quad \text{أي :}$$

$$P(A \cap B) = 0,9 - 0,65 \quad \text{منه :}$$

$$P(A \cap B) = 0,25 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) 0,25

التمرين - 16

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث $P(A \cap B) = 1/6$ و $P_A(B) = 1/4$. هل $P(A)$ يساوي :
(a) $2/3$ (b) $1/24$ (c) $1/12$

الحل - 16

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} \quad \text{منه :} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{1/6}{1/4} \quad \text{أي}$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{1} \quad \text{أي}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad \text{أي}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (a) $2/3$

التمرين - 17

X متغير عشوائي قانون احتماله كمايلي :

X_i	1	2	4
$P(X = X_i)$	1/2	1/4	1/4

هل الانحراف المعياري لـ X هو : (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (c) 2

الحل - 17

$$E(X) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(4-2)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

قوانين الاحتمال

KIMOU.

I . قانون برنولي

تعريف :

نسمي تجربة برنولي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين فقط S و \bar{S} حيث احتمالهما على الترتيب p و $1-p$ مع $0 \leq p \leq 1$ و عليه فإن قانون برنولي هو المتغير العشوائي X المعروف كمايلي : $\left. \begin{array}{l} X=1 \text{ اذا تحقق المخرج } S \\ X=0 \text{ اذا تحقق المخرج } \bar{S} \end{array} \right\}$ قانون برنولي :

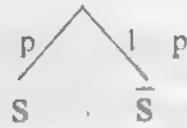
x	1	0
$p(X=x)$	p	$1-p$

 p يسمى وسيط X

ملاحظة :

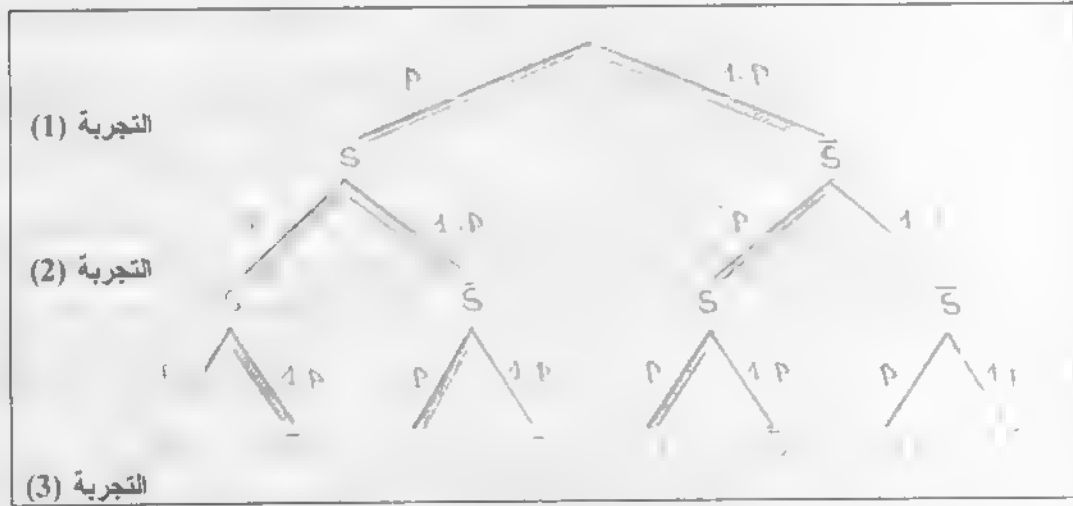
$$\begin{aligned} E(x) &= 1(p) + 0(1-p) = p \\ \text{Var}(x) &= p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 \\ &= p(1-p)(1-p+p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

قانون ثنائي الحد



لنكن تجربة برنولي ذات الوسيط p و المخرجين S و \bar{S} لدينا إذن المخطط على شجرة ذات ورقتين S و \bar{S} التالي :

عند القيام بهذه التجربة n مرة مختلفة نحصل على الشجرة التالية ذات 2^n ورقة متناوبة على الترتيب S و \bar{S} :



لاحظ أن من أجل $n=3$ لدينا $2^3 = 8$ أوراق متناوبة على الترتيب S و \bar{S} إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد مرات تحقق المخرج S بعد تكرار تجربة برنولي n مرة فإن القيم الممكنة لـ X هي $0, 1, 2, \dots, n$ ونبرهن أن من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{فإن}$$

مثلا : في التجربة السابقة أي $n=3$ لدينا :

$$p(X=2) = p^2(1-p) + p^2(1-p) + p^2(1-p) = 3 p^2(1-p) \quad : k=2$$

$$C_3^2 p^2(1-p)^{3-2} = 3 p^2(1-p)$$

و من جهة أخرى :

(انظر الأغصان المضاعفة في الشجرة)

نتيجة : حسب قانون احتمال المتغير العشوائي فإن : $\sum_{k=0}^n p(X=k) = 1$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = (1)^n = 1 \quad \text{أي :}$$

نقول أن المتغير X يتبع قانون ثنائي الحد بالوسيطين n و p

تعريف :

نقول عن متغير عشوائي X انه يتبع قانون ثنائي الحد بوسيطين n و p إذا كان X يأخذ قيم عدد مرات تحقيق المخرج S

لتجربة برنولي المكررة n مرة و نرمز له بـ $X \sim B(n; p)$

نتائج دون برهان :

n عدد طبيعي غير معدوم و p عدد حقيقي من المجال $[0; 1]$

X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B(n; p)$

من أجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$ فإن $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

نشاط :

نرمي 8 مرات زهرة نرد غير مزيفة ذات 6 أوجه مرقمة من 1 إلى 6
ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3

1- هل X يتبع قانون ثنائي الحد ؟ في حالة الإجابة بنعم حدد وسيطيه n و p

2- عين الأمل الرياضي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

3- ما هو احتمال الحصول على 4 مرات مضاعف 3

4- ما هو احتمال الحصول على 7 مرات على الأكثر مضاعف 3

5- نرمي الآن زهرة النرد n مرة حيث $n > 2$. ما هو احتمال الحصول على مرة واحدة على الأقل على مضاعف 3 ؟
ما هي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999

الحل :

1- عند رمي زهرة النرد فإن المخارج الممكنة هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6

لنعتبر الحادثة S : الحصول على رقم مضاعف 3 منه $p(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

إذن الحادثة \bar{S} هي : الحصول على رقم ليس مضاعف 3 منه $p(\bar{S}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نتيجة : المخارج الممكنة للتجربة هي S و \bar{S} باحتمالين هما على الترتيب $p = 1/3$ و $1-p = 2/3$
منه : بتكرار هذه التجربة 8 مرات و اعتبار المتغير X يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم مضاعف 3 هو

نفسه عدد مرات الحصول على المخرج S منه X يتبع قانون ثنائي الحد $B(8; 1/3)$

أي وسيطيه $p = 1/3$ و $n = 8$

2- حسب خاصية قانون احتمال ثنائي الحد فإن :

$$\begin{cases} E(X) = np = 8(\frac{1}{3}) \\ \text{Var}(X) = np(1-p) = \frac{8}{3}(\frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$\text{نتيجة : } E(X) = \frac{8}{3} \quad \text{و} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

3- احتمال الحادثة : الحصول على 4 مرات مضاعف 3 :

$$p(X = 4) = C_8^4 p^4 (1-p)^{8-4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 70 \times \frac{1}{81} \times \frac{16}{81} = \frac{1120}{6561}$$

4- احتمال الحادثة : الحصول على 7 مرات على الأكثر على مضاعف 3

هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على 8 مرات على مضاعف 3 منه

$$1 - p(X = 8) = 1 - C_8^8 p^8 (1-p)^0 = 1 - p^8 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{6560}{6561} \quad \text{الاحتمال هو :}$$

5 - الحادثة : الحصول على مرة واحدة على الأقل على رقم مضاعف 3 هي الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على كل الأرقام ليست مضاعفات 3 أي $X = 0$

$$1 - p(X = 0) = 1 - C_n^0 p^0 (1 - p)^n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{منه الاحتمال هو :}$$

$$1 - 0,999 > \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{نتيجة : } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0,999 \quad \text{تكافئ}$$

$$0,001 > \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{تكافئ}$$

$$\ln(0,001) > n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{تكافئ}$$

$$n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(2/3)} \quad \text{تكافئ}$$

$$n > 17,03 \quad \text{تكافئ}$$

نتيجة : أصغر قيمة لـ n حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على مضاعف 3 أكبر من 0,999 هي $n = 18$
III . قوانين الاحتمال المستمرة

تعريف (1)

f دالة عددية معرفة على مجال $[a; b]$ حيث $a < b$
عول أن f هي دالة كثافة احتمال على المجال $[a; b]$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :
(1) f مستمرة على $[a; b]$

(2) f موجبة على $[a; b]$

$$\int_a^b f(t) dt = 1 \quad (3)$$

تعريف (2)

X متغير عشوائي يأخذ قيمة على المجال $[a; b]$ حيث $a < b$ و p قانون احتماله .
قول أن قانون الاحتمال p يقبل f دالة كثافة اذا وفقط اذا كان من أجل كل عددين حقيقيين α و β من المجال $[a; b]$

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \quad \text{حيث } \beta \geq \alpha$$

خواص مباشرة :

$$p(X = \alpha) = p(\alpha \leq X \leq \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 0$$

$$p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leq X \leq \beta)$$

$$E(X) = \int_a^b t f(t) dt$$

مثال :

$$m \text{ عدد حقيقي و } f \text{ دالة معرفة على المجال } [0; 1] \text{ بـ } f(x) = \frac{m x^2}{1 + x^3}$$

1 - عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على $[0; 1]$

2 - ليكن X متغير عشوائي معرف على $[0; 1]$ و الذي قانون احتماله p يقبل الدالة f كدالة كثافة احتمال

$$\text{أحسب } p(1/3 \leq X \leq 1/2) ; p(X \geq 1/2) ; p(X \leq 1/2)$$

الحل :

1 - تكون f دالة كثافة احتمال على المجال $[0; 1]$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

ش1 : f مستمرة على $[0; 1]$

ش2 : f موجبة على $[0; 1]$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \quad \text{ش3 :}$$

f : مستمرة على $[0; 1]$ إذن : الشرط ش1 محقق

تكون f موجبة على $[0; 1]$ اذا وفقط اذا كان $m \geq 0$ لأن $\frac{x^2}{1+x^3} > 0$

إذن : الشرط ش2 محقق اذا وفقط اذا كان $m \geq 0$

$$\int_0^1 \frac{m x^2}{1 + x^3} dx = 1 \quad \text{الشرط ش3 يكافئ}$$

$$m \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{m}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3} dx = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{m}{3} [\ln(1+x^3)]_0^1 = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{m}{3} [\ln(1+1) - \ln(1+0)] = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{m}{3} \ln 2 = 1 \quad \text{يكافئ}$$

$$m \ln 2 = 3 \quad \text{يكافئ}$$

$$m = \frac{3}{\ln 2} \quad \text{يكافئ}$$

بما أن $\frac{3}{\ln 2} > 0$ فإن قيمة m تحقق الشرط 2

نتيجة : قيمة m حتى تكون f دالة كثافة احتمال هي $m = \frac{3}{\ln 2}$

$$f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3) \ln 2} \quad \text{منه}$$

$$p(X \leq 1/2) = p(0 \leq X \leq 1/2)$$

- 2

$$= \int_0^{1/2} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int_0^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+x^3)]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1 + \frac{1}{8}) - \ln(1+0)]$$

$$= \frac{\ln(9/8)}{\ln 2}$$

$$= \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 2}$$

$$= \frac{2 \ln 3}{\ln 2} - \frac{3 \ln 2}{\ln 2}$$

$$= \frac{2 \ln 3}{\ln 2} - 3$$

$$\approx 0.169$$

$$p(X \geq 1/2) = 1 - p(X \leq 1/2)$$

$$= 1 - 0.169$$

$$= 0.831$$

$$p(1/3 \leq X \leq 1/2) = \int_{1/3}^{1/2} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int_{1/3}^{1/2} \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1+x^3)]_{1/3}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} [\ln(1 + \frac{1}{8}) - \ln(1 + \frac{1}{27})]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln 2} \left[\ln\left(\frac{9}{8}\right) - \ln\left(\frac{28}{27}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\ln 2} \times \ln\left(\frac{9}{8} \times \frac{27}{28}\right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{243}{224}\right) \\
&0.117
\end{aligned}$$

III . قانون التوزيعات المنتظمة

تعريف :

X متغير عشوائي يتبع قانون احتمال p يقبل دالة كثافة f على المجال $[a; b]$ حيث $a < b$
 نقول أن X يتبع قانون توزيع منتظم على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كتب f دالة ثابتة على المجال $[a; b]$
 نتائج مباشرة :

f دالة ثابتة على $[a; b]$ إذن : من أجل كل x من $[a; b]$ فإن $f(x) = k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \quad \text{لكن}$$

$$\int_a^b k dx = 1 \quad \text{أي :}$$

$$[kx]_a^b = 1 \quad \text{أي}$$

$$kb - ka = 1 \quad \text{أي :}$$

$$k(b - a) = 1 \quad \text{ي}$$

$$a \neq b \quad \text{لأن} \quad k = \frac{1}{b - a} \quad \text{منه}$$

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad \text{نتيجة}$$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $[a; b]$ فإن :

$$p(X \leq \alpha) = p(a \leq X \leq \alpha) = \int_a^\alpha \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} [x]_a^\alpha = \frac{\alpha - a}{b - a}$$

الأمّل الرياضي :

$$E(X) = \int_a^b t f(t) dt$$

من تعريف الأمّل الرياضي :

$$= \int_a^b \frac{t}{b - a} dt$$

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b t dt$$

$$\frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 \right]$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)}$$

$$= \frac{(b - a)(b + a)}{2(b - a)}$$

$$= \frac{b + a}{2}$$

مثال : نختار عشوائيا عددا حقيقيا من المجال $[4; 6]$

ما هو احتمال أن يكون هذا العدد : A محصور بين $\frac{9}{2}$ و $\frac{16}{3}$

(B) اكبر من $\frac{36}{7}$

الحل : ليكن X المتغير العشوائي الذي يرقى بكل اختيار قيمة العدد المختار من المجال $[4; 6]$

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{من } X \text{ يتبع قانون مربع مضد على المجال } [4; 6] \text{ حيث أنه كثافة احتماله هي}$$

$$p(9/2 < X < 16/3) = \int_{9/2}^{16/3} f(x) dx \quad (A)$$

$$= \int_{9/2}^{16/3} \frac{1}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \right]_{9/2}^{16/3}$$

$$= \frac{16}{6} - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{10}{24}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$p(X < 36/7) = p(36/7 < X < 6) \quad (B)$$

$$= \int_{36/7}^6 f(x) dx$$

$$= \int_{36/7}^6 \frac{1}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \right]_{36/7}^6$$

$$= 3 - \frac{36}{14}$$

$$= \frac{6}{14}$$

$$= \frac{3}{7}$$

IV. القانون الاسي :

تعريف :

يقول ان لمعبر العشوائي X يتبع القانون الاسي ذو الوسيط λ اذا وفقط ان كثافته احتماله هي الدالة f المعروفة من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما .

نتائج :

$$1 - \text{ليكن } \alpha \in]0; +\infty[\text{ إذن : } p(X \leq \alpha) = p(0 \leq X \leq \alpha)$$

$$= \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$= \int_0^\alpha \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= [-e^{-\lambda x}]_0^\alpha$$

$$= -e^{-\lambda \alpha} + 1$$

$$= 1 - e^{-\lambda \alpha}$$

$$E(X) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha x f(x) dx \quad - 2$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \text{لنحسب بالتجزئة :}$$

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array} \right\} \text{ صغ}$$

$$I = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx \quad \text{منه :}$$

$$- \alpha e^{-\lambda \alpha} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{نتيجة :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\alpha e^{-\lambda \alpha} = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\lambda \alpha} = 0 \end{array} \right\} \text{ لأن } (\lambda > 0)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{خلاصة :}$$

مثال : X متغير عشوائي يتبع قانون أسيا وسيطه λ

عين λ علما أن $p(X \geq 50) = 2/3$

الحل : دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X هي $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

منه : $p(X \leq 50) = 1 - e^{-50\lambda}$ حسب النتائج المباشرة من الدرس

لكن $p(X \geq 50) = 1 - p(X \leq 50)$

أي $p(X \geq 50) = 1 - (1 - e^{-50\lambda})$

أي $p(X \geq 50) = e^{-50\lambda}$

نتيجة : $p(X \geq 50) = 2/3$ يكافئ $e^{-50\lambda} = 2/3$

$$-50\lambda = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{يكافئ}$$

$$\lambda = -\frac{1}{50} \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{يكافئ}$$

$$-\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{لأن } \lambda = \frac{1}{50} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{يكافئ}$$

تطبيق :

نعتبر زمن انتظار الزبائن امام الشباك في احدى الادارات كمتغير عشوائي X بالدقائق و يتبع قانون أسيا بوسيط $\lambda = 0,08$ حيث

1 - ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق

2 - ما هو احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة

3 - ما هو معدل زمن الانتظار أمام هذا الشباك .

الحل :

X يتبع قانون أسيا ذو الوسيط $\lambda = 0,08$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0,08 e^{-0,08x}$

و من أجل كل α من المجال $[0; +\infty[$ فإن : $p(X \leq \alpha) = 1 - e^{-0,08\alpha}$

منه النتائج التالية :

$$\begin{aligned} p(X < 10) &= 1 - e^{-0,08(10)} \\ &= 1 - e^{-0,8} \\ &\approx 0,550 \end{aligned} \quad - 1$$

إذن احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أقل من 10 دقائق هو 0.55

$$\begin{aligned} p(X > 30) &= 1 - p(X \leq 30) \\ &= 1 - (1 - e^{-0,08(30)}) \\ &= e^{-0,08(30)} \\ &= e^{-2,4} \\ &\approx 0,090 \end{aligned} \quad - 2$$

إذن : احتمال أن ينتظر شخص ما مدة أكثر من 30 دقيقة هو 0,09
3 — معدل زمن الانتظار هو الأمل الرياضي للمتغير X

$$E(X) = \frac{1}{0.08} \approx 12,5 \quad \text{أي :}$$

منه : معدل زمن الانتظار هو 12,5 دقيقة (12 دقيقة و 30 ثانية)

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 —

في امتحان شهادة بكالوريا كانت نسبة النجاح 40 %
من بين 5 أصدقاء مترشحين ، ما هو احتمال الحوادث التالية :

(A) أن لا يكون أي ناجح

(B) أن ينجح واحد فقط

(C) أن ينجح إثنان فقط

(D) أن ينجح على الأقل إثنان

(E) أن ينجح الأصدقاء الخمسة

الحل 1 —

تجربة اختيار مترشح ما لها مخرجين فقط هما :

$$\left. \begin{aligned} S : \text{النجاح باحتمال } p = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \\ \bar{S} : \text{عدم النجاح باحتمال } 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\}$$

إذن : بتكرار هذه التجربة 5 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد المترشحين الناجحين من بين الخمسة أصدقاء

منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n=5$ و $p = \frac{2}{5}$

و عليه النتائج كمايلي :

$$p(A) = p(X=0) = C_5^0 p^0 (1-p)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125} \quad (A)$$

$$p(B) = p(X=1) = C_5^1 p^1 (1-p)^4 = 5 \times \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{162}{625} \quad (B)$$

$$p(C) \quad p(X=2) = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 10 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625} \quad (C)$$

$$p(D) = p(X \geq 2) \quad (D)$$

$$= 1 - p(X < 2)$$

$$= 1 - [p(X=1) + p(X=0)]$$

$$= 1 - \left[\frac{162}{625} + \frac{243}{3125} \right]$$

$$= 1 - \frac{810 + 243}{3125}$$

$$= \frac{2072}{3125}$$

$$p(E) \quad p(X=5) = C_5^5 p^5 (1-p)^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125} \quad (E)$$

التمرين 2

عائشة ، فاطمة و خديجة ثلاث صديقات ترشحن لامتحان شهادة البكالوريا بحظوظ مختلفة حسب مجهودات كل منها طوال السنة الدراسية .

إذا كانت احتمالات نجاح كل منها هي 0,25 (عائشة) و 0,9 (فاطمة) ، 0,45 (خديجة) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : تتجح الصديقات الثلاثة معا .

B : تتجح واحدة منهن على الأقل .

C : تتجح صديقتان فقط .

D : تتجح صديقتان فقط من بينهما فاطمة .

الحل 2

نرمز بـ 0 إلى الرسوب و 1 إلى النجاح
منه الحالات الممكنة هي كمايلي :

عائشة	فاطمة	خديجة	الحادثة	الاحتمال
0	0	0	a	$0,75 \times 0,1 \times 0,55 = 0,04125$
		1	b	$0,75 \times 0,1 \times 0,45 = 0,03375$
	1	0	c	$0,75 \times 0,9 \times 0,55 = 0,37125$
		1	d	$0,75 \times 0,9 \times 0,45 = 0,30375$
1	0	0	e	$0,25 \times 0,1 \times 0,55 = 0,01375$
		1	f	$0,25 \times 0,1 \times 0,45 = 0,01125$
	1	0	g	$0,25 \times 0,9 \times 0,55 = 0,12375$
		1	h	$0,25 \times 0,9 \times 0,45 = 0,10125$

لاحظ أن احتمال رسوب عائشة ، فاطمة و خديجة هي على الترتيب 0,75 ، 0,1 ، 0,55
منه النتائج التالية :

الحادثة A توافق الحادثة h

منه : $p(A) = p(h) = 0,10125$

الحادثة B توافق الحادثة \bar{a} (الحادثة العكسية للحادثة و لا ناجحة)

منه : $p(B) = p(\bar{a}) = 1 - p(a) = 1 - 0,04125 = 0,95875$

الحادثة C توافق الحوادث : {d ; f ; g}

منه :
 $p(C) = p(d) + p(f) + p(g)$
 $= 0,30375 + 0,01125 + 0,12375$
 $= 0,43875$

الحادثة D توافق الحوادث {d ; g}

منه : $p(D) = p(d) + p(g) = 0,30375 + 0,12375 = 0,4275$

التمرين 3

نرمي زهرة نرد متوازنة 4 مرات متتالية

1 - أحسب p احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

2 - أحسب p' احتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي

3 - أجب عن السؤالين (1) و (2) من أجل خمس رميات متتالية

4 - أجب عن السؤال (1) من أجل n رمية متتالية ($n > 5$)

الحل 3

عند رمي زهرة النرد لدينا مخرجين فقط هما :

S : الحصول على رقم زوجي باحتمال $p(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

\bar{S} : الحصول على رقم فردي باحتمال $p(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

1 - ادن : عدد تكرار هذه التجربة 4 مرات نعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على رقم زوجي

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد بوسيطين n و $p = \frac{1}{2}$
عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

$$X = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$p = p(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \quad \text{منه :}$$

2 - عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماماً من عدد مرات ظهور رقم فردي أي $X = 3$ أو $X = 4$
منه :

$$\begin{aligned} p' &= p(X > 2) \\ &= p(X = 3) + p(X = 4) \\ &= C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) + C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 4 \left(\frac{1}{8}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

3 - عند إعادة التجربة 5 مرات فإن :

لا يمكن الحصول على عدد مرات ظهور رقم فردي يساوي عدد مرات ظهور رقم زوجي لأن عدد الرميات هو 5
أي فردي $\left(\frac{5}{2} \notin N\right)$

$$p = 0 \quad \text{منه :}$$

يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماماً من عدد مرات ظهور رقم فردي إذا و فقط إذا كان $X = 3$ أو $X = 4$
أو $X = 5$
أي :

$$\begin{aligned} p' &= p(X > 2) \\ &= p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= 10 \left(\frac{1}{32}\right) + 5 \left(\frac{1}{32}\right) + \frac{1}{32} \\ &= \frac{16}{32} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 - إذا أعدنا التجربة n مرة نميز حالتين كمايلي :

الحالة الأولى : n زوجي إذن : $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

$$p = p(X = k) \quad \text{إذن :}$$

$$= C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$k = n/2 \quad \text{حيث} \quad = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$

في هذه الحالة لا يمكن أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي

$$p = 0 \quad \text{لأن عدد الرميات فردي منه}$$

التمرين 4 -

في إحدى المسابقات يطرح على المترشح سؤال مرفوق بثلاث أجوبة مقترحة و احد منها فقط صحيحة . فيقدم المترشح إجابة عشوائية و دون تفكير .

1 - ما هو احتمال أن تكون إجابته صحيحة .

2 - المسابقة مكونة الآن من 5 أسئلة من الشكل السابق .

أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 3 أسئلة .

B : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 4 أسئلة .

C : يقدم المترشح إجابة صحيحة عن 5 أسئلة .

3 - إذا كان النجاح في المسابقة يقتضي الإجابة الصحيحة عن 3 أسئلة على الأقل . فما هو احتمال نجاح هذا المترشح الذي يعتمد في الإجابة على الطريقة العشوائية .

الحل - 4

1 - تجربة الإجابة العشوائية على سؤال له 3 اختيارات لها مخرجين

$$\left. \begin{array}{l} S : \text{الجواب صحيح و احتماله } p(S) = 1/3 \\ \bar{S} : \text{الجواب خاطئ و احتماله } p(\bar{S}) = 2/3 \end{array} \right\} \text{ فقط هما :}$$

نتيجة : احتمال أن تكون الإجابة صحيحة هو $1/3$

2 - المسابقة مكونة من 5 أسئلة

أذن : نكرر التجربة 5 مرات نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الأوبة الصحيحة منه X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 5$ و $p = 1/3$ منه النتائج التالية :

$$p(A) = p(X = 3) = C_5^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \left(\frac{1}{27}\right) \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{40}{243} \quad (A)$$

$$p(B) = p(X = 4) = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right) = 5 \left(\frac{1}{81}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{243} \quad (B)$$

$$p(C) = p(X = 5) = C_5^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad (C)$$

3 - احتمال الحصول على 3 أوبة صحيحة على الأقل أي $X = 3$ أو $X = 4$ أو $X = 5$ منه : احتمال النجاح هو :

$$p = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243} \\ &= \frac{51}{243} = \frac{17}{81} \end{aligned}$$

ملاحظة : في هذا التمرين اعتدنا أن التلميذ يحاول إجباريا على السؤال أي دائما يعطي إقتراح سواء كان صحيح أو خاطئ .

التمرين - 5

يحب رشيد صناعة النكت لكنه للأسف لا يوفق أحيانا في تشكيل نكتة مضحكة حيث احتمال أن تكون نكتته مضحكة هو 0,05 إذا علمت أن رشيد يشكل نكتة كل يوم . أحسب احتمال أن يشكل نكتة مضحكة في :

(A) أسبوع (B) شهر (30 يوم) (C) سنة (365 يوم)

الحل - 5

تجربة رشيد في تشكيل نكتة لها مخرجين فقط هما :

S : النكتة مضحكة باحتمال $p = 0,05$

\bar{S} : النكتة ليست مضحكة باحتمال $1 - p = 0,95$

منه : نكرر هذه التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد النكت المضحكة التي شكلها رشيد بعد تكرار التجربة n مرة (أي n يوما) فإن X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n هو عدد الأيام و $p = 0.05$ منه النتائج التالية :

1 - احتمال الحصول على نكتة مضحكة في أسبوع ($n = 7$)

$$p(X = 1) = C_7^1 (0,05)^1 (0,95)^6 = 7 \times 0,05 \times (0,95)^6$$

2 - احتمال الحصول على نكتة مضحكة في شهر ($n = 30$)

$$p(X = 1) = C_{30}^1 (0,05)^1 (0,95)^{29} = 30 \times 0,05 \times (0,95)^{29}$$

3 - احتمال الحصول على نكتة مضحكة في سنة ($n = 365$)

$$p(X = 1) = C_{365}^1 (0,05)^1 (0,95)^{364} = 365 \times 0,05 \times (0,95)^{364}$$

التمرين - 6

نرمي قطعة نقود متوازنة n مرة

ما هو أصغر عدد من الرميات اللازمة حتى يكون احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل أكبر تماما من 98 %

الحل - 6

تجربة رمي القطعة النقدية المتوازنة لها مخرجين فقط هما :

S : ظهور الوجه F باحتمال $1/2$

\bar{S} : ظهور الظهر P باحتمال $1/2$

باعتبار إعادة التجربة n مرة و المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على الوجه F فإن X يتبع قانون

احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 1/2$

منه : احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة $X = 0$

منه الاحتمال المطلوب هو : $1 - p(X = 0)$

$$1 - C_n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{أي :}$$

$$1 - 98\% > \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{يكافئ} \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 98\% \quad \text{نتيجة :}$$

$$1 - 0,98 > \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{يكافئ}$$

$$0,02 > \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{يكافئ}$$

$$\ln(0,02) > n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{يكافئ}$$

$$\ln(0,02) > -n \ln 2 \quad \text{يكافئ}$$

$$\frac{\ln(0,02)}{\ln 2} > -n \quad \text{يكافئ}$$

$$n > \frac{-\ln(0,02)}{\ln 2} \quad \text{يكافئ}$$

$$n > 5,64 \quad \text{يكافئ}$$

$$n \geq 6 \quad \text{يكافئ}$$

خلاصة : أصغر عدد من الرميات اللازمة هو 6 رميات .

التمرين - 7

إليك الشكل المقابل :

نضع عشوائيا نقطة على هذا الشكل

احتمال أن تكون النقطة في جزء ما من الشكل هو نسبة مساحة هذا الجزء إلى

مساحة المربع بأكمله .

(I) 1 - أحسب $p(D)$ احتمال أن تكون النقطة على القرص ذو المساحة D

2 - أحسب $p(S_1)$ احتمال أن تكون النقطة على الجزء ذو المساحة S_1

(II) لتكن القيم التقريبية التالية :

$$p(D) = 0,008$$

$$p(S_k) = 0,0785 \quad \text{من أجل} \quad k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

نعتبر اللعبة التالية :

إذا كانت النقطة على القرص D نربح المبلغ 10 da

إذا كانت النقطة على أحد الأجزاء S_k نربح k da مع $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

إذا كانت النقطة تقع في المنطقة R الملونة نخسر 4 da

نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المبلغ المحصل عليه

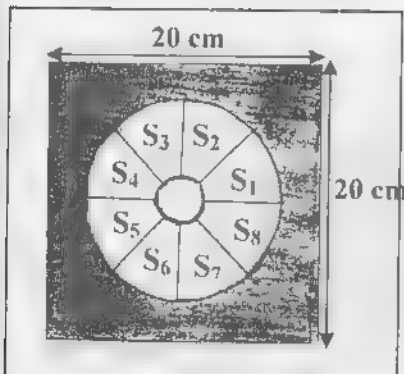
1 - أحسب $p(R)$ ثم الأمل الرياضي للمتغير X

2 - نلعب مرتين متتابتين و بكيفيتين مستقلتين . أحسب احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم

3 - ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 نلعب n مرة متتابة .

أحسب الاحتمال p_n للحصول على نقطة واحدة على الأقل داخل القرص D ثم حدد أصغر قيمة لـ n

$$p_n \geq 0,9$$



الحل - 7

مساحة المربع هي $20 \times 20 = 400$ مقطرة بـ cm^2

$$p(D) = \frac{D}{400} \quad \text{حيث } D \text{ هي مساحة القرص } D. \quad (I) - 1$$

$$p(S_1) = \frac{S_1}{400} \quad \text{حيث } S_1 \text{ هي مساحة الجزء } S_1. \quad - 2$$

$$p(R) = 1 - [p(D) + \sum_{k=1}^8 p(S_k)] \quad (II) - 1$$

$$\begin{aligned} &= 1 - p(D) - 8 p(S_k) \\ &= 1 - 0,008 - 8(0,0785) \\ &= 0,364 \end{aligned}$$

لدينا قانون احتمال المتغير العشوائي X كمايلي

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	10	- 4
$p(X = X_i)$	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,0785	0,008	0,364

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,0785(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 0,008(10) + 0,364(-4) \quad \text{منه :} \\ &= 0,0785(36) + 0,08 - 1,456 \\ &= 1,45 \end{aligned}$$

2 - الحادثة العكسية للحادثة : الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هي

الحادثة : الحصول على مبلغ سالب تماما . و ليكن $p(\bar{S})$ هذا الاحتمال

الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي : $\{RR; RS_3; RS_2; RS_1; S_3R; S_2R; S_1R\}$

$$\begin{aligned} p(\bar{S}) &= [p(R)]^2 + 6 \times p(R) \times p(S_k) \quad \text{منه :} \\ &= (0,364)^2 + 6 \times (0,364)(0,0785) \\ &= 0,30394 \end{aligned}$$

نتيجة : احتمال الحصول على مبلغ موجب أو معدوم هو :

$$\begin{aligned} 1 - p(\bar{S}) &= 1 - 0,30394 \\ &= 0,69606 \end{aligned}$$

3 - تجربة وضع نقطة على الشكل لها مخرجين فقط هما :

S : النقطة على القرص D باحتمال $p(S) = 0,008$

\bar{S} : النقطة خارج القرص D باحتمال $p(\bar{S}) = 1 - 0,008 = 0,992$

إذن : بتكرار التجربة n مرة و اعتبار المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد مرات الحصول على نقطة داخل القرص

D فإن المتغير X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0,008$

$$\begin{aligned} p_n &= p(X \geq 1) \quad \text{إذن :} \\ &= 1 - p(X = 0) \\ &= 1 - C_n^0 (0,008)^0 (0,992)^n \end{aligned}$$

$= 1 - (0,992)^n$ و هو احتمال الحصول على نقطة على الأقل داخل القرص D

$$1 - (0,992)^n \geq 0,9 \quad \text{يكافئ} \quad p_n \geq 0,9 \quad \text{نتيجة :}$$

$$1 - 0,9 \geq (0,992)^n \quad \text{يكافئ}$$

$$0,1 \geq (0,992)^n \quad \text{يكافئ}$$

$$\ln(0,1) \geq n \ln(0,992) \quad \text{يكافئ}$$

$$n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,992)} \quad \text{يكافئ}$$

$$n \geq 286,67 \quad \text{يكافئ}$$

إذن : أصغر قيمة لـ n حتى يكون $p_n \geq 0,9$ هي $n = 287$

التمرين 8 -

يحتوي صندوق على 5 كرات منها 4 سوداء و واحدة بيضاء .

(I) ن سحب من الصندوق 6 كرات على التوالي مع الارجاع في كل مرة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء .

1 - عرف قانون الاحتمال للمتغير X ثم احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري

(II) نقوم الآن بالسحب n مرة بنفس الكيفية السابقة .

ليكن X_n المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية عدد مرات ظهور الكرة البيضاء

1 - عرف قانون الاحتمال للمتغير X_n ثم احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري

(III) ليكن Y_n المتغير العشوائي المعروف بـ $Y_n = \frac{X_n}{n}$ الذي يمثل تواتر ظهور القريضة البيضاء

عرف قانون احتمال المتغير Y_n و احسب أمله الرياضي

الحل - 8

عملية سحب كرة من الصندوق لها مخرجين فقط هما :

B : الكرة بيضاء باحتمال $p = 1/5$

\bar{B} : الكرة سوداء باحتمال $1 - p = 4/5$

إذن : عملية سحب n كرات على التوالي بارجاع هو تكرار هذه التجربة n مرة منه النتائج التالية :

(I) سحب 6 كرات على التوالي بارجاع إذن $n = 6$

X هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة

إذن : X يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه $n = 6$ و $p = 1/5$

منه : $E(X) = n p = 6/5$

$$\text{Var}(X) = n p(1 - p) = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(II) نقوم بالسحب n مرة إذن : المتغير X_n الذي يعبر عن عدد الكرات البيضاء المسحوبة يتبع قانون احتمال ثنائي الحد

وسيطيه n و $p = 1/5$

منه : $E(X_n) = n p = n/5$

$$\text{Var}(X_n) = n p(1 - p) = \frac{n}{5} \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{4n}{25}$$

$$\sigma(X_n) = \sqrt{\text{Var}(X_n)} = \sqrt{\frac{4n}{25}} = \frac{2}{5} \sqrt{n}$$

$$Y_n = \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \times X_n \quad (\text{III})$$

بما أن $1/n$ ثابت و X_n يتبع قانون ثنائي الحد $B(n; 1/5)$ فإن حسب الخواص :

$$E(Y_n) = E\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Var}(Y_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \times X_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}(X_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{4n}{25} = \frac{4}{25n}$$

$$\sigma(Y_n) = \sqrt{\text{Var}(Y_n)} = \sqrt{\frac{4}{25n}} = \frac{2}{5\sqrt{n}}$$

التمرين 9 -

p قانون احتمال معرف على المجال $[1; 4]$ حيث f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = \frac{k}{x^2}$ (k عدد حقيقي)

المطلوب : عين قيمة k

الحل - 9

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال $[1; 4]$ إذا و فقط إذا كان :

$$\left. \begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= 1 \\ k &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ أي } \int_1^4 \frac{k}{x^2} dx = 1$$

$$k \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = 1 \quad \text{أي}$$

$$k \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = 1 \quad \text{أي}$$

$$k \left[-\frac{1}{4} + 1 \right] = 1 \quad \text{أي}$$

$$\frac{3}{4} k = 1 \quad \text{أي}$$

$$k = \frac{4}{3} \quad \text{أي}$$

نتيجة : $k = \frac{4}{3}$ منه $f(x) = \frac{4}{3x^2}$ مستمرة و موجبة على المجال $[1; 4]$

التمرين - 10

ليكن p قانون احتمال معرف على المجال $[-1; 3]$ و f دالة كثافته معرفة بـ $f(x) = k|x|$
المطلوب : عين قيمة k

الحل - 10

تكون f دالة كثافة احتمال على المجال $[-1; 3]$ إذا و فقط إذا كان :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= 1 \\ k &> 0 \end{aligned} \right\} \text{ أي } \int_{-1}^3 k|x| dx = 1$$

$$\int_{-1}^0 k|x| dx + \int_0^3 k|x| dx = 1 \quad \text{أي}$$

$$\int_{-1}^0 -kx dx + \int_0^3 kx dx = 1 \quad \text{أي}$$

$$-k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 = 1 \quad \text{أي}$$

$$-k \left(0 - \frac{1}{2} \right) + k \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = 1 \quad \text{أي}$$

$$\frac{k}{2} + \frac{9k}{2} = 1 \quad \text{أي}$$

$$5k = 1 \quad \text{أي}$$

$$k = 1/5 \quad \text{أي}$$

نتيجة : $k = \frac{1}{5}$ منه $f(x) = \frac{1}{5}|x|$

التمرين - 11

X متغير عشوائي معرف على المجال $[0; \pi]$ و f دالة كثافته احتماله معرفة بـ $f(x) = k \sin x$
1 - عين قيمة k

2 - أحسب $p(x \geq \pi/3)$

3 - أحسب $\int_0^\pi x f(x) dx$ ماذا يمثل هذا التكامل ؟

الحل - 11

1 - f دالة كثافة احتمال على المجال $[0; \pi]$ إذا و فقط إذا كان :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} k \sin x \, dx &= 1 \\ \int_0^{\pi} f(x) \, dx &= 1 \end{aligned} \right\} \text{أي } k > 0$$

$$k \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 1 \quad \text{أي}$$

$$k[-\cos x]_0^{\pi} = 1 \quad \text{أي}$$

$$k[1 + 1] = 1 \quad \text{أي}$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

$$\text{نتيجة : } f(x) = \frac{1}{2} \sin x \quad \text{منه } k = \frac{1}{2}$$

$$p(X > \frac{\pi}{3}) = p(\frac{\pi}{3} < X \leq \pi) \quad - 2$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2} \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} [-\cos x]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} [1 + \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{\pi} x f(x) \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} x \sin x \, dx \quad - 3$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad \text{ليكن}$$

نحسب I بالتجزئة كمايلي :

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -\cos x \end{aligned} \right\} \text{منه } \left. \begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= \sin x \end{aligned} \right\} \text{نضع}$$

$$I = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \quad \text{إذن :}$$

$$= -\pi \cos \pi + 0 + [\sin x]_0^{\pi}$$

$$= \pi$$

$$\int_0^{\pi} x f(x) \, dx = \frac{1}{2} I = \frac{\pi}{2} \quad \text{نتيجة :}$$

$$E(X) = \frac{\pi}{2} \quad \text{التكامل } \int_0^{\pi} x f(x) \, dx \text{ يمثل الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ أي}$$

التمرين - 12

X متغير عشوائي يعبر عن عدد مأخوذ عشوائيا من المجال [-3 ; 5]

1 - ما هو قانون احتمال المتغير X

2 - أحسب امله الرياضي E(X)

3 - أحسب p(X < 0) ؛ p(X = 0) ؛ p(X ≥ 1/3) ؛ p(X ≤ 4/5)

الحل - 12

1 - X يتبع قانون توزيع منتظم على المجال [-3 ; 5] حيث دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(-3 - 5)} = \frac{1}{8}$

2 - حسب خواص الدرس : $E(X) = \frac{-3 + 5}{2} = 1$

$$p(X < 0) = p(-3 \leq X < 0)$$

$$= \int_{-3}^0 f(x) dx$$

$$= \int_{-3}^0 \frac{1}{8} dx$$

$$= \frac{1}{8} [x]_{-3}^0$$

$$\frac{3}{8}$$

$$p(X = 0) = p(0 \leq X \leq 0)$$

$$\int_0^0 f(x) dx$$

$$= 0$$

$$p\left(X \geq \frac{1}{3}\right) = p\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 5\right)$$

$$= \int_{1/3}^5 f(x) dx$$

$$= \int_{1/3}^5 \frac{1}{8} dx$$

$$= \frac{1}{8} [x]_{1/3}^5$$

$$= \frac{1}{8} \left[5 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{14}{24}$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$p\left(X \leq \frac{4}{5}\right) = p\left(-3 \leq X \leq \frac{4}{5}\right)$$

$$= \int_{-3}^{4/5} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{8} [x]_{-3}^{4/5}$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{4}{5} + 3\right]$$

$$= \frac{19}{40}$$

التمرين 13

نأخذ عشوائياً عدداً من المجال $[2 ; 13]$. ما هو احتمال الحوادث التالية :

A : الحصول على عدد أصغر من 10

B : الحصول على عدد جزؤه الصحيح زوجي .

الحل 13

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن العدد المحدود عشوائياً من المجال $[2 ; 13]$. لن X يتبع قانون توزيع منتظم على

المجال $[2 ; 13]$ دالة كثافة احتماله f معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{13-2} = \frac{1}{11}$

منه من أجل كل α و β من المجال $[2 ; 13]$ فإن إذا كان $\alpha < \beta$:

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{11} dx = \frac{1}{11} [x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{11}$$

منه النتائج التالية :

$$p(A) = p(X \leq 10) = p(2 < X \leq 10) = \frac{10 - 2}{11} = \frac{8}{11}$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(2 \leq X < 3) + p(4 \leq X < 5) + p(6 \leq X < 7) + p(8 \leq X < 9) + p(10 \leq X < 11) + p(12 \leq X < 13) \\ &= \frac{3 - 2}{11} + \frac{5 - 4}{11} + \frac{7 - 6}{11} + \frac{9 - 8}{11} + \frac{11 - 10}{11} + \frac{13 - 12}{11} \\ &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

تفسير : على المجال $[a; b]$ إذا كان a زوجي فإن كل الأعداد التي تنتمي إلى المجال $[a; b]$ لها جزء صحيح يساوي a أي زوجي ($a \in \mathbb{N}$ و $b = a + 1$)

التمرين 14

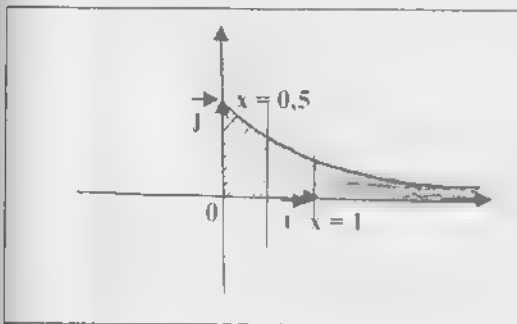
T متغير عشوائي يأخذ قيم في المجال $[0; +\infty[$ و يتبع قانونا أسيا وسيطه λ حيث $\lambda = 1$

1 - أرسم المنحنى البياني لدالة كثافة احتمال المتغير T

2 - فسر بيانيا الاحتمالين التاليين : $p(T \leq 0,5)$ و $p(T > 1)$ ثم أعط قيمة مقربة لكل منهما .

الحل 14

1 - T يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 1$ إذن : دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة بـ $f(x) = e^{-x}$ منه المنحنى التالي :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad f(0) = 1 \quad ; \quad x \in [0; +\infty[$$

$f'(x) = -e^{-x}$ إذن : f متناقصة تماما .

2 - التفسير الهندسي :

$$p(T \leq 0,5) = p(0 \leq T \leq 0,5)$$

$$= \int_0^{0,5} f(x) dx$$

$$= \int_0^{0,5} e^{-x} dx$$

$$= S_1$$

حيث S_1 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و محور التراتيب و المستقيم ذو المعادلة



$x = 0,5$ إذن : $p(T \leq 0,5)$ هي مساحة الجزء المخطط

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(1 \leq T \leq \alpha)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{\alpha} f(x) dx$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{\alpha} e^{-x} dx$$

$$= S_2$$

حيث S_2 هي مساحة حيز المستوي المحدود بمنحنى الدالة f و محور الفواصل و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ و

المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ حيث α يؤول إلى $+\infty$: إذن : $p(T > 1)$ هي مساحة الجزء الملون



القيم المقربة :

$$p(T \leq 0,5) = \int_0^{0,5} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{0,5} = -e^{-0,5} + 1 = 0.3934$$

$$\begin{aligned} p(T > 1) &= 1 - p(T \leq 1) \\ &= 1 - p(0 \leq T \leq 1) \end{aligned}$$

$$= 1 - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= 1 - [-e^{-x}]_0^1$$

$$= 1 - [-e^{-1} + 1]$$

$$= e^{-1}$$

$$0.3678$$

ملاحظة : يمكن حساب $p(T > 1)$ بطريقة أخرى كما يلي :

$$p(T > 1) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(1 < T \leq \alpha)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{\alpha} e^{-x} dx$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^{\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -e^{-\alpha} + e^{-1}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\alpha} = 0 \quad \text{لأن} \quad e^{-\alpha} = 0.3678$$

التمرين - 15

T متغير عشوائي يأخذ قيمه في المجال $[0; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال اسي و سيطه $\lambda > 0$ من أجل أي قيمة t يكون للحادثة $(T < t)$ و الحادثة العكسية لها نفس الاحتمال ؟

الحل - 15

T يتبع قانون احتمال اسي إذن : دالة كثافة احتماله هي f حيث $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ليكن $t \in [0; +\infty[$ يكون للحادثتين $(T < t)$ و $(T \geq t)$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $p(T < t) = 1/2$

$$p(T < t) + p(T \geq t) = 1 \quad \text{لأن :}$$

$$p(T < t) = p(T \geq t) \quad \text{أي} \quad 2 p(T < t) = 1$$

$$p(T < t) = 1/2 \quad \text{منه :}$$

$$\int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2} \quad \text{نتيجة :} \quad p(T < t) = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$\lambda \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$\int_0^t e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{يكافئ}$$

$$\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^t = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{يكافئ}$$

$$-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{يكافئ}$$

$$-e^{-\lambda t} + 1 = 1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$-e^{-\lambda t} = -1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$e^{-\lambda t} = 1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$-\lambda t = \ln(1/2) \quad \text{يكافئ}$$

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-\lambda} \quad \text{يكافئ}$$

$$-\ln(1/2) = \ln 2 \quad \text{لأن} \quad t = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : يكون للحادثتين $(T < t)$ و $(T \geq t)$ نفس الاحتمال إذا و فقط إذا كان $t = \frac{1}{\lambda} \ln 2$

التمرين 16

T متغير عشوائي يأخذ قيمته في المجال $[0; +\infty[$ و يتبع قانون احتمال أسي وسيطه $\lambda > 0$
برهن أن احتمال الحادثة $(T > \frac{1}{\lambda})$ مستقل عن λ ثم أعط قيمة مقربة له

الحل 16

T يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$p(T > \frac{1}{\lambda}) = 1 - p(T \leq \frac{1}{\lambda}) \quad \text{منه :}$$

$$= 1 - \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - \lambda \int_0^{1/\lambda} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{1/\lambda}$$

$$= 1 - \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(1/\lambda)} + \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$= 1 - (1 - 1)$$

$$= e^{-1}$$

$$= 0.367879441$$

التمرين 17

g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ و تحقق الشروط التالية :

g ليست معدومة

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين t و h فإن $g(t+h) = g(t) \times g(h)$

1- برهن أن $g'(t) = \alpha g(t)$ من أجل كل $t \geq 0$ حيث $\alpha = g'(0)$

2- استنتج أن $g(t) = e^{\alpha t}$

الحل 17

1- لدينا من أجل كل عددين حقيقيين موجبين t و h فإن :

$$g(t+h) = g(h) \times g(t)$$

$$g(t) = g(0) \times g(t) \quad \text{إذن : من أجل } h=0 \text{ فإن :}$$

$$g(0) = 1 \quad \text{أي } g(0) = \frac{g(t)}{g(t)} \quad \text{منه :}$$

من جهة أخرى حسب تعريف العدد المشتق عند t فإن :

$$g'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{g(x) - g(t)}{x - t}$$

نضع $x = t + h$

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{t+h-t}$$

إذن :

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

$$g(t+h) = g(t) \times g(h) \quad \text{لأن } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t) \times g(h) - g(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} g(t) \left(\frac{g(h) - 1}{h} \right)$$

$$g(0) = 1 \quad \text{لأن } = \lim_{h \rightarrow 0} g(t) \left(\frac{g(h) - g(0)}{h - 0} \right)$$

$$= g(t) \times g'(0) \quad \text{لأن حسب التعريف فإن}$$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$$

نتيجة : $\alpha g(t) = g'(t)$ حيث $\alpha = g'(0)$

2 - لدينا : $g'(t) = \alpha g(t)$ معادلة تفاضلية من الشكل $y' = a y$

منه : $g(t) = c e^{\alpha t}$ حيث c ثابت حقيقي

لكن $g'(0) = \alpha$ حيث $g'(t) = \alpha c e^{\alpha t}$

اذن : $\alpha c = \alpha$

منه : $c = 1$

نتيجة : $g(t) = e^{\alpha t}$ حيث $\alpha = g'(0)$

التمرين 18

إذا كانت مدة عمر تلفاز بالسنوات هو متغير عشوائي يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ حيث متوسط عمر التلفاز هو 14 أحسب مايلي :

1 - وسيط القانون الأسي λ .

2 - أوجد دالة كثافة احتمال هذا المتغير العشوائي .

3 - ما هو احتمال أن يكون عمر تلفاز ما أكبر من 20 سنة .

الحل - 18

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عمر التلفاز

X يتبع قانون احتمال أسي وسيطه λ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ حيث $\lambda > 0$

1 - متوسط عمر التلفاز هو 14 سنة اذن : $E(X) = 14$

$$E(X) = 14 \quad \text{يكافئ} \quad \frac{1}{\lambda} = 14$$

$$\lambda = \frac{1}{14} \quad \text{يكافئ}$$

2 - $\lambda = \frac{1}{14}$ إذن : دالة كثافة احتمال المتغير X هي : $f(x) = \frac{1}{14} e^{-\frac{1}{14}x}$

3 - $p(X > 20) = 1 - p(0 \leq X \leq 20)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \int_0^{20} f(x) dx \\ &= 1 - \int_0^{20} \frac{1}{14} e^{-\frac{1}{14}x} dx \\ &= 1 - \frac{1}{14} \int_0^{20} e^{-\frac{1}{14}x} dx \\ &= 1 - \frac{1}{14} \left[-14 e^{-\frac{1}{14}x} \right]_0^{20} \\ &= 1 - \frac{1}{14} \left[-14 e^{-\frac{20}{14}} + 14 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{14} \left[-14 e^{-\frac{20}{14}} + 14 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{14} \left[-14 e^{-\frac{20}{14}} + 14 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{14} \left[-14 e^{-\frac{20}{14}} + 14 \right] \\ &\approx 0.23965 \end{aligned}$$

التمرين 19

عمر مقاومة كهربائية يتبع قانون احتمال أسي نرسم له بـ X (معبرا عنه بالأيام) وسيطه $\lambda = 0,0012$

1 - ما هو متوسط عمر مقاومة كهربائية

2 - أحسب احتمال أن تعمر مقاومة مدة :

(A) أكثر من 100 يوم .

(B) أقل من 60 يوم .

3 - أحسب t (عدد الأشهر ذات 30 يوم) حتى يكون احتمال أن تعمر مقاومة ما مدة أقل من t شهرا هو 0,5

الحل - 19

X يتبع قانون أسي وسيطه $\lambda = 0,0012$ إذن : دالة كثافة احتماله هي $f(x) = 0,0012 e^{-0,0012x}$ منه النتائج التالية :

$$E(X) = \frac{1}{0.0012} \quad 833.33 \text{ : متوسط عمر مقاومة هو}$$

أي : متوسط عمر مقاومة هو 833 يوم و 8 ساعات

$$p(A) = p(X \geq 100) \quad \text{--- 2}$$

$$= 1 - p(X \leq 100)$$

$$= 1 - \int_0^{100} 0.0012 e^{-0.0012x} dx$$

$$= 1 - 0.0012 \int_0^{100} e^{-0.0012x} dx$$

$$= 1 - 0.0012 \left[-\frac{1}{0.0012} e^{-0.0012x} \right]_0^{100}$$

$$\approx 0.886$$

$$p(B) = p(X \leq 60) \quad \text{--- 3}$$

$$= \int_0^{60} 0.0012 e^{-0.0012x} dx$$

$$= 0.0012 \left[-\frac{1}{0.0012} e^{-0.0012x} \right]_0^{60}$$

$$= 0.0012 \left[\frac{-1}{0.0012} e^{-0.0012 \times 60} + \frac{1}{0.0012} \right]$$

$$= 1 - e^{-0.072}$$

$$= 0.069$$

$$\int_0^t 0.0012 e^{-0.0012x} dx = 0.5 \quad \text{--- 3 : ليكن } t > 0 \quad p(X \leq t) = 0.5 \quad \text{يكافئ}$$

$$0.0012 \left[-\frac{1}{0.0012} e^{-0.0012x} \right]_0^t = 0.5 \quad \text{يكافئ}$$

$$1 - e^{-0.0012t} = 0.5 \quad \text{يكافئ}$$

$$-e^{-0.0012t} = -0.5 \quad \text{يكافئ}$$

$$-0.0012t = \ln(0.5) \quad \text{يكافئ}$$

$$t = \frac{\ln(0.5)}{-0.0012} \quad \text{يكافئ}$$

$$t = 577.62 \quad \text{يكافئ}$$

نتيجة : $t = 577.62$ يوم أي 19 أشهر و يوم واحد و ساعة و 40 دقيقة

التمرين 20

في مركز بريد احدى البلديات مدة الانتظار عند الشباك بالدقائق هي متغير عشوائي X يتبع قانون أسّي وسيطه $\lambda = 0.07$

1 - ما هو متوسط وقت الانتظار

2 - أحسب احتمال الحوادث التالية : (A) أن ننتظر أكثر من نصف ساعة (B) أن ننتظر أقل من 20 دقيقة .

الحل - 20

دالة كثافة احتمال المتغير X هي $f(x) = 0.07 e^{-0.07x}$

$$E(X) = \frac{1}{0.07} = 14.285 \quad \text{--- 1}$$

إذن : متوسط وقت الانتظار هو 14,285 دقيقة .

$$p(A) = p(X \geq 30) \quad \text{--- 2}$$

$$= 1 - p(X < 30)$$

$$= 1 - \int_0^{30} 0.07 e^{-0.07x} dx$$

$$\begin{aligned}
& 1 - 0.07 \left[\frac{-1}{0.07} e^{-0.07x} \right]_0^{30} \\
& = 1 + e^{-0.07 \times 30} - 1 \\
& = 0.1224 \\
p(B) &= p(X \leq 20) \\
&= \int_0^{20} 0.07 e^{-0.07x} dx \\
&= 0.07 \left[\frac{-1}{0.07} e^{-0.07x} \right]_0^{20} \\
&= 1 - e^{-0.07 \times 20} \\
&= 0.7534
\end{aligned}$$

التمرين 21

نهتم بدراسة متوسط عمر حيز الكروني (بالأسابيع). نعتبر عن هذه الوضعية بقانون احتمال p لمتوسط العمر من دون أعطال معرف على المجال $[0; +\infty[$ حيث احتمال أن يكون الجهاز في حالة جيدة طيلة المدة t

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \text{ هو}$$

أثبتت دراسة إحصائية أن 50% من الأجهزة المشغلة منذ 200 أسبوع لا زالت في حالة جيدة و بالتالي $p([0; 200]) = 0,5$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{200} \text{ برهن أن}$$

2 - ما هو احتمال أن يكون عمر جهاز ما أكبر من 300 أسبوع

$$\begin{aligned}
3 - \text{نقبل أن متوسط عمر الأجهزة معطى بالعلاقة} \\
d_m = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx}{\int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx} = \frac{-\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \alpha} + 1}{\lambda} \text{ (A) برهن أن} \\
\text{(B) استنتج } d_m
\end{aligned}$$

الحل 21

$$\begin{aligned}
\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx &= 1/2 & \text{يكافئ} & p([0; 200]) = 0,5 \quad -1 \\
[-e^{-\lambda x}]_0^{200} &= 1/2 & \text{يكافئ} & \\
-e^{-200\lambda} + 1 &= 1/2 & \text{يكافئ} & \\
-e^{-200\lambda} &= -1/2 & \text{يكافئ} & \\
-200\lambda &= \ln(1/2) & \text{يكافئ} & \\
-200\lambda &= -\ln 2 & \text{يكافئ} & \\
\lambda &= \frac{\ln 2}{200} & \text{يكافئ} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p([0; 300]) &= \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} dx & -2 \\
&= [-e^{-\lambda x}]_0^{300} \\
&= 1 - e^{-300\lambda} \\
&= 1 - e^{-\frac{300 \ln 2}{200}} \\
&= 0,6464
\end{aligned}$$

(A - 3) ليكن $I = \int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx$ باستعمال التكامل بالتجزئة :

$$\left. \begin{aligned} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{aligned} u(x) &= x \\ v'(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned} \right\} \text{ نضع}$$

$$I = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx \quad \text{منه :}$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{-\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \alpha} + 1}{\lambda} \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$d_m = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx}{-\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \alpha} + 1} \quad (B)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \alpha} + 1}{\lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\lambda \alpha} &= 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\lambda \alpha e^{-\lambda \alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ لأن } = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{200}{\ln 2}$$

$$\approx 288.539$$

نتيجة : متوسط عمر الأجهزة هو 288,539 أسبوع

التمرين 22

في شركة متخصصة لانتاج الثلاجات أثبت مراقب نوعية أن الثلاجة يمكن أن تحوي عيبين : إما عيب في التلحيم باحتمال قدره 0,03 أو عيب إلكتروني باحتمال 0,02 حيث العيبين مستقلين .

نقول عن ثلاجة أنها غير صالحة إذا وجد فيها أحد العيبين

1 - برهن أن احتمال أن تكون ثلاجة ما غير صالحة هو 0,0494

2 - عرضت الشركة في سوق ما 800 ثلاجة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق الثلاجات المعروضة للبيع بعدد الثلاجات غير الصالحة

(A) عرف قانون احتمال المتغير X

(B) احسب E(X) الأمل الرياضي لـ X

3 - إشتري أحد التجار 25 ثلاجة من هذه الشركة

(A) احسب احتمال وجود ثلاجتين غير صالحتين

(B) تاجر آخر يريد شراء عدد من الثلاجات بشرط أن يكون احتمال حصوله على ثلاجة غير صالحة على الأقل ; أقل من 50 %

أحسب أكبر عدد من الثلاجات يمكن أن يشتريها هذا التاجر

4 - Y هو المتغير العشوائي الذي يرفق كل ثلاجة من هذه الشركة بمدة صلاحيتها (مقدرا بالأيام)

إذا علمت أن Y يتبع قانون أسّي وسيطه 0,0007 على المجال $[0 ; +\infty[$

أحسب احتمال أن تكون مدة صلاحية ثلاجة ما تتراوح بين 700 و 1000 يوم .

الحل - 22

1 - لتكن الحوادث : S : الثلاجة ذات عيب في التلحيم .

E : الثلاجة ذات عيب إلكتروني .

N : ثلاجة غير صالحة

$$p(N) = p(S \cup E) \quad \text{لدينا :}$$

$$= p(S) + p(E) - p(S \cap E)$$

$$= p(S) + p(E) - p(S) \times p(E) \quad \text{لأن الحادثتين E و S مستقلتين}$$

$$= 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02$$

$$= 0,0494$$

2 - كل ثلاجة يمكن أن تكون في مخرجين فقط هما :

N : الثلاثة غير صالحة باحتمال $p = 0,0494$

\bar{N} : الثلاثة صالحة باحتمال $1 - p = 0,9506$

(A) إذن : إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يعبر عن عدد الثلاثات غير الصالحة من بين 800 ثلاثة فإن X يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 800$ و $p = 0,0494$

$$E(X) = np = 800(0,0494) = 39,52 \quad (B)$$

(A - 3) يعتبر T المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاثات غير الصالحة من بين 25 ثلاثة إذن : T يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه $n = 25$ و $p = 0,0494$

$$p(T = 2) = C_{25}^2 (0,0494)^2 (0,9506)^{23}$$

$$= 0,732108(0,9506)^{23}$$

(B) لكر S المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الثلاثات غير الصالحة من بين n ثلاثة إذن : S يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0,0494$

الحادثة ثلاثة غير صالحة على الأقل هي الحادثة العكسية لـ كل الثلاثات صالحة منه الاحتمال هو : $p(S = 0) = 1$

$$1 - C_n^0 (0,9506)^n \leq 1/2 \quad \text{يكافئ} \quad 1 - p(S = 0) \leq 50 \%$$

$$- (0,9506)^n \leq -1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$(0,9506)^n \geq 1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$n \ln(0,9506) \geq \ln(1/2) \quad \text{يكافئ}$$

$$\ln(0,9506) < 0 \quad \text{لأن} \quad n \leq \frac{\ln(1/2)}{\ln(0,9506)} \quad \text{يكافئ}$$

$$n \leq 13,6818 \quad \text{يكافئ}$$

$$n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\} \quad \text{يكافئ}$$

إذن : أكبر عدد من الثلاثات يمكن للتاجر أن يشتريها هو 13

4 - دالة كثافة احتمال Y هي $f(x) = 0,0007 e^{-0,0007x}$

$$p(700 \leq Y \leq 1000) = \int_{700}^{1000} 0,0007 e^{-0,0007x} dx \quad \text{منه :}$$

$$= [-e^{-0,0007x}]_{700}^{1000}$$

$$= -e^{-0,0007 \times 1000} + e^{-0,0007 \times 700}$$

$$= e^{-0,49} - e^{-0,7}$$

$$= 0,11604$$

التمرين - 23

يحتوي صندوق على كرات لا نفرق بينها عند اللمس و موزعة كمايلي : 10 % منها خضراء

و عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء

يسحب لاعب من الصندوق كرة عشوائيا :

إذا كانت الكرة حمراء يأخذ ربحا قاعديا

إذا كانت الكرة بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي

إذا كانت الكرة خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي

(I) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 DA

1 - أكتب قانون احتمال المتغير X الذي يعبر عن مبلغ الربح

2 - أحسب الربح المتوسط المأمول .

(II) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن

ليكن x الربح القاعدي بالدينار .

1 - أثبت أن المسألة تؤول الى دراسة النهايات الحدية للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$$

2 - أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم استنتج قيمة g_0

الحل - 23

لتكن الحوادث التالية : R : سحب كرة حمراء

B : سحب كرة بيضاء

V : سحب كرة خضراء

10 % من الكرات خضراء إذن $p(V) = 0,1$

عدد الكرات البيضاء هو 3 مرات عدد الكرات الخضراء إذن : $p(B) = 3 p(V) = 0,3$

نتيجة : $p(R) = 1 - [p(V) + p(B)] = 1 - 0,4 = 0,6$

(I) 1 - القيم الممكنة لـ X هي : $\{20; 400; -8000\}$

قانون احتمال المتغير X :

X_i	20	400	-8000
$p(X = X_i)$	0,6	0,3	0,1

2 - الربح المتوسط المأمول :

$$\begin{aligned} E(x) &= 20(0,6) + 400(0,3) - 8000(0,1) \\ &= 12 + 120 - 800 \\ &= -668 \end{aligned}$$

ملاحظة : الأمل الرياضي سالب أي خسارة (ليست في صالح اللاعب)

(II) 1 - ليكن G المتغير العشوائي الذي يعبر عن مبلغ الربح

القيم الممكنة لـ G هي $\{x; x^2; -x^3\}$ حيث x هو الربح القاعدي ($x \in [0; +\infty[$)

منه قانون احتمال المتغير G هو كمايلي :

g_i	x	x^2	$-x^3$
$p(G = g_i)$	0,6	0,3	0,1

أمل الربح هو : $E(G) = 0,6x + 0,3x^2 - 0,1x^3$

نتيجة : $\begin{cases} E(G) = f(x) \\ x \in [0; +\infty[\end{cases}$

منه : يكون أمل الربح اعظميا إذا وفقط إذا كان لـ f قيمة حدية أعظمية على المجال $[0; +\infty[$

2 - تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$:

f مستمرة على $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0,3x^2 + 0,6x + 0,6 \\ &= 0,3(-x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

إشارة f' على $[0; +\infty[$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

منه :

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-

منه جدول تغيرات الدالة f على $[0; +\infty[$:

x	0	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	0	1,8392	$-\infty$

$$f(1 + \sqrt{3}) - 0.6(1 + \sqrt{3}) + 0.3(1 + \sqrt{3})^2 - 0.1(1 + \sqrt{3})^3 \approx 1.8392$$

نتيجة : يكون أمل الربح أكبر ما يمكن قيمته 1.8392 من أجل قيمة الربح القاعدي $\pi_0 = 1 + \sqrt{3} \approx 2,7320$ DA

التمرين - 24

في دراسة أعدتها مؤسسة للكهرباء عن الاخطار التي يتعرض لها عمالها تبين ان كل عامل معرض الى خطرين رئيسيين هما : الخطر A : سقوط العامل من العمود الكهربائي باحتمال 0,03 و الخطر B : تعرض العامل لصعق كهربائي باحتمال 0,17

نقول عن عامل انه مصاب إذا تعرض إلى أحد الخطرين . (باعتبار أن الخطرين مستقلين)

1 - نأخذ عشوائيا عامل من المؤسسة . أثبت أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949

2 - تضم المؤسسة 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين في المؤسسة . عرف قانون احتمال X و احسب امله الرياضي.

3 - (a) في فصل الشتاء شملت المؤسسة فوجا مكون من 10 عمال للتدخل السريع .

احسب احتمال أن يكون في هذا الفوج أكثر من عاملين مصابين .

(b) حتى لا يؤثر عدد المصابون على اداء زملائهم فكرت ادارة المؤسسة في تشكيل فرع للتدخل السريع بحيث يكون

احتمال وجود عامل مصاب على الأقل 50 % . فما هو اكبر عدد من العمال يمكن ان يضمه هذا الفرع .

الحل - 24

1 - لتكن S الحادثة " العامل مصاب "

$$p(S) = p(A \cup B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \quad \text{لأن الحادثتين A و B مستقلتين}$$

$$= 0.03 + 0.17 - 0.03(0.17)$$

$$= 0.1949$$

2 - تجربة اختيار عامل لها مخرجين فقط هما :

S : باحتمال $p = 0.1949$: العامل مصاب

\bar{S} : باحتمال $1 - p = 0.8051$: العامل غير مصاب

اذن : بتكرار التجربة 500 مرة فإن المتغير X الذي يعبر عن عدد العمال المصابين يتبع قانون احتمال ثنائي الحد

وسيطيه $n = 500$ و $p = 0.1949$

$$p(X = k) = C_{500}^k (0.1949)^k (0.8051)^{500-k} \quad \text{إن : من أجل } 0 \leq k \leq 500 \text{ فإن}$$

$$E(X) = np = 500(0.1949) = 97.45 \quad \text{منه :}$$

3 - ليكن Y_n المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العمال المصابين من بين n عامل

إن : Y_n يتبع قانون احتمال ثنائي الحد وسيطيه n و $p = 0.1949$

$$\text{حيث } p(X = k) = C_n^k (0.1949)^k (0.8051)^{n-k} \text{ مع } 0 \leq k \leq n$$

(a) إذا كان $n = 10$ نحصل على :

$$p(Y_{10} > 2) = 1 - p(Y_{10} \leq 2)$$

$$= 1 - [p(Y_{10} = 0) + p(Y_{10} = 1) + p(Y_{10} = 2)]$$

$$p(Y_{10} = 0) = C_{10}^0 (0.1949)^0 (0.8051)^{10} = (0.8051)^{10} \quad \text{لدينا :}$$

$$p(Y_{10} = 1) = C_{10}^1 (0.1949)(0.8051)^9 = 1.949(0.8051)^9$$

$$p(Y_{10} = 2) = C_{10}^2 (0.1949)^2 (0.8051)^8 = 1.7093(0.8051)^8$$

$$\text{نتيجة : } p(Y_{10} > 2) = 1 - [(0.8051)^{10} + 1.949(0.8051)^9 + 1.7093(0.8051)^8]$$

$$= 1 - (0.8051)^8 [(0.8051)^2 + 1.5691 + 1.7093]$$

$$\approx 0.307$$

(b) الحادثة وجود عامل مصاب على الأقل هي الحادثة العكسية للحادثة لا يوجد أي عامل مصاب إذن :

$$1 - p(Y_n = 0) \leq 1/2 \quad \text{يكافئ} \quad p(Y_n = 0) \leq 50\%$$

$$1 - \frac{1}{2} \leq p(Y_n = 0) \quad \text{يكافئ}$$

$$p(Y_n = 0) \geq 1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$C_n^0 (0.1949)^0 (0.8051)^n \geq 1/2 \quad \text{يكافئ}$$

$$\begin{aligned}
 (0.8051)^n &> 0.5 && \text{يكافئ} \\
 n \ln(0.8051) &\geq \ln(0.5) && \text{يكافئ} \\
 n &\leq \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.8051)} && \text{يكافئ} \\
 n &\leq 3,197 && \text{يكافئ} \\
 n &\in \{0; 1; 2; 3\} && \text{يكافئ}
 \end{aligned}$$

نتيجة : أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفوج هو 3

التمرين 25

لاحظ مدير ثانوية ارتفاع عدد الغيابات و تكرارها عند بعض التلاميذ و عندما بحث في الأمر ، وجد أن أسباب الغياب تتمثل في المرض أو مشكل النقل .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية (بالأيام) التي يدرسها التلميذ احمد دون أي غياب .
نقبل أن X يتبع قانونا أسيا وسيطه $\lambda = 0,01$ حيث قانون الاحتمال معرف بـ :

$$p(X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} 0,01 e^{-0,01x} dx$$

1 - أحسب احتمال أن تكون الفترة الدراسية دون غياب لأحمد هي :

(a) محصورة بين 30 و 60 يوم

(b) أكبر من 90 يوم

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx \quad \text{بـ استعمال التكامل بالتجزئة أحسب}$$

3 - أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$ ماذا تمثل هذه النهاية .

4 - تضم هذه الثانوية N تلميذ حيث الفترات الدراسية التي يقضيها كل تلميذ دون غياب عبارة عن متغيرات عشوائية

مستقلة متنى متنى تتبع نفس القانون الأسى ذو الوسيط $\lambda = \frac{1}{100}$

d عدد حقيقي موجب نضع Y_d المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d (بالأيام)

(a) برهن أن Y_d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطاه N و $e^{-\lambda d}$

(b) أعط العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d بالأيام .

الحل 25

$$p(a) = p(30 \leq X \leq 60) \quad - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{30}^{60} 0,01 e^{-0,01x} dx \\
 &= [-e^{-0,01x}]_{30}^{60} \\
 &= -e^{-0,01(60)} + e^{-0,01(30)} \\
 &= 0.1920
 \end{aligned}$$

$$p(b) = p(X \geq 90)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - p(X \leq 90) \\
 &= 1 - \int_0^{90} 0,01 e^{-0,01x} dx \\
 &= 1 - [-e^{-0,01x}]_0^{90} \\
 &= 1 - [-e^{-0,01(90)} + 1] \\
 &= 0.4065
 \end{aligned}$$

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{100} e^{-\frac{1}{100}x} dx \quad - 2$$

التكامل بالتجزئة :

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\frac{1}{100}x} \end{array} \right\} \text{ منه : } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$I(\alpha) = \left[-x e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{100}x} dx \quad \text{إذن :}$$

$$= -\alpha e^{-\frac{1}{100}\alpha} + \left[-100 e^{-\frac{1}{100}x} \right]_0^\alpha$$

$$= -\alpha e^{-0.01\alpha} - 100 e^{-0.01\alpha} + 100$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} -\alpha e^{-0.01\alpha} - 100 e^{-0.01\alpha} + 100 = 100 \quad - 3$$

العدد $100 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$ يمثل الأمل الرياضي للمتغير X

أي الفترة المتوسطة بالأيام التي يدرس فيها تلميذ دون أي غياب .

4 - احتمال أن يكون تلميذ لم يتغيب طيلة الفترة d هو :

$$p(X \geq d) = 1 - p(X \leq d)$$

$$= 1 - \int_0^d 0.01 e^{-0.01x} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-0.01x} \right]_0^d$$

$$= 1 - \left[-e^{-0.01d} + 1 \right]$$

$$= e^{-0.01d}$$

(a) إذن : Y_d الذي يعبر عن عدد التلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d يتبع قانون ثنائي الحد وسيطيه N و $p = e^{-0.01d}$

$$p(Y_d = k) = C_N^k (e^{-0.01d})^k (1 - e^{-0.01d})^{N-k} \quad 0 \leq k \leq N \quad \text{إذن : من أجل}$$

$$E(Y_d) = N p = N e^{-0.01d} \quad (b)$$

إذن : العدد المتوسط للتلاميذ الذين لم يتغيبوا طيلة الفترة d هو $[N e^{-0.01d}] + 1$ حيث $[x]$ هو الجزء الصحيح لـ x (لأن عدد التلاميذ المطلوب هو عدد طبيعي)

التمرين 26

مدة صلاحية آلة بالساعات تتبع قانون أسّي p معرف على $[0; +\infty[$ وسيطه $\lambda = 0.0005$ حيث احتمال أن تتعطل الآلة

$$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \text{قبل الزمن } t \text{ هو :}$$

1 - هل احتمال أن تكون مدة صلاحية آلة أكبر من 2500 ساعة هو :

$$\begin{array}{llll} (a) & e^{\frac{2500}{2000}} & (b) & e^{\frac{-5}{4}} \\ (c) & 1 - e^{\frac{-2500}{2000}} & (d) & e^{\frac{-2000}{2500}} \end{array}$$

2 - مدة الصلاحية المتوسطة للآلة معطاة بالعلاقة $E = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \lambda x e^{-\lambda x} dx$ هل مدة الصلاحية المتوسطة بالساعات هي :

$$\begin{array}{llll} (a) & 3500 & (b) & 2000 \\ (c) & 2531,24 & (d) & 3000 \end{array}$$

الحل - 26

$$p([2500; +\infty[) = 1 - p([0; 2500]) \quad - 1$$

$$= 1 - \int_0^{2500} 0.0005 e^{-0.0005x} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-0.0005x} \right]_0^{2500}$$

$$= e^{-0.0005 \times 2500}$$

$$= e^{-1.25}$$

$$= e^{\frac{-5}{4}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) $e^{-\frac{\lambda}{4}}$

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx = 2$$

باستعمال التكامل بالجزئية :

$$\left. \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{array} \right\} \text{ منه : } \left. \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array} \right\} \text{ نضع}$$

$$\int_0^{\alpha} \lambda x e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-\lambda x} dx$$

منه :

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} - \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda}$$

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\alpha e^{-\lambda \alpha} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \alpha} + \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{نتيجة :}$$

$$\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{0.0005}$$

$$= 2000$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (b) 2000

BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

Kimob

الرياضيات

دروس و تمارين محلولة بالتفصيل

- ➔ حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- ➔ حلول مفصلة لتمرين نموذجية
- ➔ حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

الجزء

4

3^e Année Secondaire : Mathématiques

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

سلسلة هباج

Kimou.

الرياضيات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نماذج للبكالوريا

الجزء الرابع

ثانوي



السنة

تقني رياضي – رياضيات – علوم تجريبية

سلسلة هباج

يسرني أن أقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الاعزاء في المرحلة الثانوية لكل الشعب العلمية منها و التكنولوجيا .

— محتوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

— يشمل هذا الجزء من السلسلة على أربعة محاور من البرنامج :

- المتتاليات
- الاحتمالات الشرطية
- قوانين الاحتمالات
- الموافقات في Z

— يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

— كما حرصت ان اعالج في نهاية كل درس ، مجموعة تطبيقات للتصحيح الذاتي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

— كما حرصت أن أعالج في نهاية كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لامتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

أملأ بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هباج جمال
نصواني وهيب

الهاتف : 0773 26 52 81

المتتاليات العددية

تذكير :

يسمى متتالية عددية حقيقيّة $(u_n)_{n \geq n_0}$ كل دالة عددية ترفق بكل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ العدد الحقيقي u_n (n_0 عدد طبيعي معطى)

اتجاه تغير متتالية عددية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية

✓ تكون (u_n) مترادفة (على الترتيب مترادفة تماماً) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن

$$u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{على الترتيب من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 \text{ فإن } u_{n+1} > u_n)$$

✓ تكون (u_n) متناقصة (على الترتيب متناقصة تماماً) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن

$$u_{n+1} \leq u_n \quad (\text{على الترتيب } u_{n+1} < u_n)$$

✓ تكون (u_n) متتالية ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$ فإن $u_{n+1} = u_n$

✓ إذا كتب (u_n) متتالية مترادفة تماماً أو متناقصة تماماً أو مترادفة أو متناقصة نقول إن المتتالية (u_n) رتيبة

المتتاليات الحسابية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و α عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية ذات الأساس α و لحد أول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحققت إحدى الشروط التالية :

$$1 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + \alpha$$

$$2 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_{n+2} + u_n = 2 u_{n+1}$$

$$3 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \alpha$$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n = (n - k + 1) \left(\frac{u_k + u_n}{2} \right)$$

المتتاليات الهندسية :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية عددية و q عدد حقيقي ثابت

تكون $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية ذات الأساس q و الحد الأول u_{n_0} إذا و فقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$$1 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_{n+1} = q \cdot u_n$$

$$2 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_{n+2} \times u_n = (u_{n+1})^2$$

$$3 - \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ حيث } n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$$

ملاحظة : إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية ذات الأساس q حيث $q \neq 1$ فإن :

$$u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n = u_k \left(\frac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q} \right)$$

نهاية متتالية :

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية حسابية أساسها α فإن :

$$1 - \text{ إذا كان } \alpha > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$2 - \text{ إذا كان } \alpha < 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$3 - \text{ إذا كان } \alpha = 0 \text{ (المتتالية ثابتة)} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_k$$

إذا كانت $(u_n)_{n \geq k}$ متتالية هندسية أساسها q فإن :

$$1 - \text{ إذا كان } -1 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$2 - \text{ إذا كان } q > 1 \text{ و } u_k > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ إذا كان } q > 1 \text{ و } u_k < 0$$

4 - نهاية المتتالية (u_n) غير موجودة إذا كان $q \leq -1$

$$5 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_k \text{ إذا كان } q = 1 \text{ (المتتالية ثابتة)}$$

نشاط 1

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n - 5n - 1$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_{n+1} - u_n$

1 - أثبت أن (v_n) متتالية حسابية بطلب حدها الأول و أساسها

2 - استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحل 1

1 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= (u_n - 5n - 1) - u_n \\ &= -5n - 1 \\ &= -5(n - 0) - 1 \end{aligned}$$

نتيجة : (v_n) متتالية حسابية أساسها $q = -5$ و حدها الأول $v_0 = -1$

2 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n = u_{n+1} - u_n$

لنكتب هذه المساواة من أجل $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$ كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= u_1 - u_0 \dots\dots\dots (1) \\ v_1 &= u_2 - u_1 \dots\dots\dots (2) \\ v_2 &= u_3 - u_2 \dots\dots\dots (3) \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \dots\dots\dots n \end{aligned} \right\} \text{ n مسود مختلفه}$$

نجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_{n-1} = -u_0 + u_n \dots\dots\dots (\alpha)$$

من جهة أخرى لدينا $\frac{v_0 + v_{n-1}}{2} (n - 1 + 1) = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_{n-1}$ هو مجموع حدود متتابعة من المتتالية الحسابية (v_n)

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots + v_{n-1} &= \left(\frac{n}{2}\right)[-1 - 5(n-1) - 1] \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)(-5n + 3) \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{n}{2}(-5n + 3) = u_n - u_0 \quad \text{و عليه المساواة } (\alpha) \text{ تصبح :}$$

$$u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + u_0 \quad \text{أي :}$$

$$u_n = \frac{n}{2}(-5n + 3) + 3 \quad \text{أي :}$$

تحقيق : لنحسب الحدود u_1 و u_2 بطريقتين مختلفتين كمايلي :

$$u_1 = u_0 - 5(0) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$u_2 = u_1 - 5(1) - 1 = 2 - 5 - 1 = -4$$

من جهة أخرى :

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(-5 + 3) + 3 \quad \text{إذن :} \quad \frac{1}{2}(-5(1) + 3) + 3 = \frac{-2}{2} + 3 = 2$$

$$u_2 = \left(\frac{2}{2}\right)(-5(2) + 3) + 3 \quad \text{إذن :} \quad \frac{2}{2}(-5(2) + 3) + 3 = -10 + 3 + 3 = -4$$

نشاط 2

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = 2$ و العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

1 - أثبت أن (v_n) متتالية هندسية بطلب أساسها و حدها الأول

2 - احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3 - ماهو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

4 - احسب نهاية v_n

الحل - 2

4 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \left(\frac{1}{3}u_n + 2\right) - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)(u_n - 3) \end{aligned}$$

$$v_n = u_n - 3 : \text{ لأن } = \left(\frac{1}{3}\right)v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/3$ و حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هندسية} \\ v_n = -1 \\ q = 1/3 \end{array} \right\} - 2 \quad \text{إذن : } v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$v_n = u_n - 3 : \text{ لدينا}$$

$$u_n = v_n + 3 : \text{ إذن}$$

$$\text{منه : } u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 \text{ و هو المطلوب}$$

$$3 - \text{ لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n : v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[-\frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$v_{n+1} - v_n > 0 : \text{ لدينا}$$

إذن : المتتالية (v_n) متزايدة تماما

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad - 4$$

$$-1 < 1/3 < 1 \text{ لأن } = 0$$

تقارب متتالية عددية :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية . l عدد حقيقي ثابت

$$\checkmark \text{ إذا كان } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ نقول أن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة نحو } l$$

$$\checkmark \text{ إذا كان } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ نقول أن المتتالية } (u_n) \text{ متباعدة نحو } +\infty$$

$$\checkmark \text{ إذا كان } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ نقول أن المتتالية } (u_n) \text{ متباعدة نحو } -\infty$$

تذكير : لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_n = f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $[a ; +\infty[$

حيث a عدد حقيقي . ليكن l عدد حقيقي

$$\checkmark \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ فإن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\checkmark \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

✓ إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

نشاط - 3

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_n = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$ عين نهاية هذه المتتالية

الحل - 3

نعرف الدالة العددية f على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x+1}}$

إذن : $f(n) = u_n$ أي $f(n) = \sqrt{\frac{4n+3}{n+1}}$

لكن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = \sqrt{4} = 2$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ و هو المطلوب

المتتاليات المحدودة :

تعريف : (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}

✓ إذا وجد عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq A$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى

بالعدد A أو A عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

✓ إذا وجد عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$ نقول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد

B أو B عنصر حاد من الأسفل للمتتالية (u_n)

✓ إذا كانت (u_n) متتالية محدودة من الأعلى و من الأسفل نقول أنها متتالية محدودة

✓ مثال : لنكن $(u_n)_{n>0}$ متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $u_n = \frac{4n}{n+3}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n - 1 = \frac{4n}{n+3} - 1$$

$$= \frac{4n - n - 3}{n+3}$$

$$= \frac{3(n-1)}{n+3}$$

بما أن $n > 0$ أي $n \geq 1$ فإن $n-1 \geq 0$

منه : $\frac{3(n-1)}{n+3} \geq 0$ أي $3(n-1) \geq 0$

إذن : $u_n - 1 \geq 0$

أي : $u_n \geq 1$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

منه حسب التعريف فإن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي 1

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_n - 4 = \frac{4n}{n+3} - 4$$

$$= \frac{4n - 4n - 12}{n+3}$$

$$= \frac{-12}{n+3}$$

بما أن $n+3 > 0$ فإن $\frac{-12}{n+3} < 0$

أي $u_n - 4 < 0$

أي $u_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

إذن : حسب التعريف المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي 4

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأسفل بـ } 1 \\ (u_n) \text{ متتالية محدودة من الأعلى بـ } 4 \end{array} \right\}$

إذن : (u_n) متتالية محدودة

مبرهنة :

(1) إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة

(2) إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة

المتتاليات المتجاورة

تعريف : تكون متتاليتان متجاورتان إذا و فقط إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و كان الفرق بينهما يؤول إلى الصفر

مثال :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad (u_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \rightarrow$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad (v_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \rightarrow$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{اذن : } u_{n+1} - u_n > 0 \quad \text{لأن } \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

و عليه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

و لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{لأن } = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

$$\text{اذن : } v_{n+1} - v_n < 0 \quad \text{لأن } \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

و عليه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

$$\text{لدينا أيضا } v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \text{اذن } v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{منه}$$

المتتالية (u_n) متزايدة

المتتالية (v_n) متناقصة

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

خلاصة :

اذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

مبرهنة :

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية

نشاط 4

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان بـ : $u_0 = 12$; $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1 - أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية بطلب حدها الأول و أساسها

2 - أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم أحسب نهاية w_n

3 - أثبت أن (t_n) متتالية ثابتة يطلب نهايتها

4 - أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

5 - استنتج نهاية كل من u_n و v_n

الحل - 4

1 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12} \\ &= \frac{u_n - v_n}{12} \\ &= \frac{1}{12}(u_n - v_n) \\ &= \frac{1}{12} w_n \end{aligned}$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1/12$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = 11$

2 - (w_n) متتالية هندسية حدها الأول $w_0 = 11$ و أساسها $q = 1/12$ من عبارة حدها العام $w_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ لأن : $-1 < 1/12 < 1$

3 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} \\ &= 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right) \\ &= u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) \\ &= 3u_n + 8v_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

إذن : (t_n) متتالية ثابتة

أي كل حدودها متساوية و تساوي t_0 : $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 36 + 8 = 44$

منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 44$

4 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n \\ &= \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} \\ &= \frac{2v_n - 2u_n}{3} \\ &= \frac{-2}{3}(u_n - v_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - v_n \quad \text{لأن} \quad = -\frac{2}{3} w_n \\ &= -\frac{2}{3} \left[11\left(\frac{1}{12}\right)^n \right] \\ &= -\frac{22}{3} \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{aligned}$$

بما أن $\left(\frac{1}{12}\right)^n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ لأن $-\frac{22}{3} < 0$

منه : المتتالية (u_n) متناقصة تماما

لدينا أيضا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} \\ &= \frac{1}{4} (u_n - v_n) \\ &= \frac{1}{4} w_n \\ &= \frac{1}{4} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n > 0 \quad \text{فإن} \quad \frac{1}{4} \times 11 \left(\frac{1}{12}\right)^n > 0 \quad \text{بما أن}$$

أي المتتالية (v_n) متزايدة تماما

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \quad (2) \quad \text{من جهة أخرى لدينا حسب السؤال}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة} \\ \text{المتتالية } (v_n) \text{ متزايدة} \end{array} \right\} \text{ خلاصة : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

$$5 - \text{بما أن المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان فإنهما متقاربتان و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + 8v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n + 8u_n \quad \text{منه} \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} 11u_n \end{aligned}$$

لكن $t_n = 3u_n + 8v_n$ و $t_n = 44$ لأن المتتالية (t_n) ثابتة .

$$44 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 11u_n \quad \text{أي :} \quad 44 = 3u_n + 8v_n \quad \text{منه :}$$

$$44 = 11 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 \quad \text{أي :}$$

$$\text{نتيجة :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$$

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1 -

(u_n) متتالية حسابية أساسها r و (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n

$$\text{على الترتيب بـ : } v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{1}{2} \text{ و } w_n = u_{3n} + \sqrt{7}$$

بين أن المتتاليتان (v_n) و (w_n) حسابيتان يطلب تعيين أساسيهما بدلالة r

الحل - 1

(u_n) متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 إذن حدها العام : من أجل كل عدد طبيعي n هو $u_n = u_0 + nr$

إذن : $u_{3n} = u_0 + 3nr$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \frac{3}{5}(u_0 + nr) - \frac{1}{2} \\ w_n &= u_0 + 3nr + \sqrt{7} \end{aligned} \right\} \text{ منه :}$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}rn \\ w_n &= u_0 + \sqrt{7} + 3rn \end{aligned} \right\} \text{ أي :}$$

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \frac{3}{5}u_0 - \frac{1}{2} \\ w_0 &= u_0 + \sqrt{7} \end{aligned} \right\} \text{ منه : } \left. \begin{aligned} (v_n) &\text{ متتالية حسابية أساسها } \frac{3}{5}r \text{ و حدها الأول} \\ (w_n) &\text{ متتالية حسابية أساسها } 3r \text{ و حدها الأول} \end{aligned} \right\}$$

التمرين 2 -

أحسب أقياس زوايا المثلث قائم حيث هذه الأقياس تشكل حدود متتالية حسابية

الحل - 2

المثلث قائم إذن إحدى زواياه قائمة وقيسها إذن 90°

ليكن a و b قيسي الزاويتين الأخرتين من هذا المثلث حيث $a < b < 90^\circ$

نعلم أن $a + b + 90^\circ = 180^\circ$ (1)

إذا كان $a, b, 90^\circ$ بهذا الترتيب حدود متتالية حسابية فليكن أساسها r إذن : $b = a + r$ و $90 = a + 2r$

$$a + a + r + a + 2r = 180^\circ \text{ : المساواة (1) تصبح :}$$

$$3a + 3r = 180^\circ \text{ : أي :}$$

$$3(a + r) = 180^\circ \text{ : أي :}$$

$$a + r = 60^\circ \text{ : أي :}$$

$$b = 60^\circ \text{ : أي :}$$

$$a = 30^\circ \text{ : منه :}$$

نتيجة : الأقياس المطلوبة هي على الترتيب 30° ، 60° ، 90°

التمرين 3 -

(v_n) متتالية عددية معرفة بـ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$

1 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n > 0$

2 - نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \frac{1}{v_n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب أساسها

الحل - 3

1 - نستعمل الاستدلال بالتراجع

من أجل $n = 0$ لدينا $v_0 = 1$ و $1 > 0$ إذن : الخاصية محققة

من أجل $n = 1$: $\frac{v_0}{v_0 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$ و $1/2 > 0$ إذن الخاصية محققة

نفرض أن $v_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $v_{n+1} > 0$ ؟

لدينا $v_n > 0$ إذن : $v_n + 1 > 1$ و خاصة $v_n + 1 > 0$

$$\frac{1}{v_n + 1} > 0 \quad \text{منه :}$$

$$\frac{v_n}{v_n + 1} > 0 \quad \text{إذن}$$

$$v_{n+1} > 0 \quad \text{أي :}$$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n > 0$

2 - من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{v_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{v_n}{v_n + 1}} \\ &= \frac{v_n + 1}{v_n} \\ &= 1 + \frac{1}{v_n} \\ &= 1 + u_n \end{aligned}$$

إذن : (u_n) متتالية حسابية أساسها 1

التمرين 4

(u_n) متتالية حسابية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 - نكتب u_n بدلالة n

2 - أحسب $u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

الحل 4

1 - (u_n) متتالية حسابية إذن : $u_n = u_1 + (n - 1)r$ حيث r هو الأساس

$$u_n = -2 + 3(n - 1) \quad \text{منه :}$$

$$u_n = 3n - 5 \quad \text{أي :}$$

$$2 - u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20}{2} (u_1 + u_{20})$$

$$= 10(-2 + 3(20) - 5)$$

$$= 10(60 - 7)$$

$$= 530$$

التمرين 5

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10 \quad \text{أحسب المجموع :}$$

الحل 5

لاحظ أن الأعداد $1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \dots, 10$ هي حدود متتالية من متتالية حسابية (u_n) أساسها 1/2

$$u_1 = 1/2 \quad \text{نضع}$$

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n - 1) \quad \text{إذن :}$$

$$u_n = \frac{1}{2}n \quad \text{أي :}$$

لنبحث عن رتبة الحد الذي قيمته 10

لدينا : $u_n = 10$ أي $\frac{1}{2} n = 10$ أي : $n = 20$
إذن : عدد الحدود هو 20

منه : $S = \frac{20}{2} \left(\frac{1}{2} + 10 \right)$

أي : $S = 5 + 100 = 105$

التمرين 6

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و $u_1 = -2$

1 - أكتب u_n بدلالة n

2 - أحسب المجموع $u_1 + u_2 + \dots + u_7$

لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معوم $n \rightarrow v_n = u_{2n}$

3 - أحسب المجموع $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ بدلالة n

الحل 6

1 - من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2(3)^{n-1}$

2 - $u_1 + u_2 + \dots + u_7 = u_1 \left(\frac{3^7 - 1}{3 - 1} \right)$

$= -2 \left(\frac{3^7 - 1}{2} \right)$

$= -(3^7 - 1)$

$= 1 - 3^7$

3 - من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_n = u_{2n}$
 $= -2(3)^{2n-1}$

$= -2 \left(\frac{1}{3} \right) (3)^{2n}$

$= \frac{-2}{3} (9)^n$

$= \frac{9}{9} \times \left(\frac{-2}{3} \right) (9)^n$

$= 9 \left(\frac{-2}{3} \right) (9)^{n-1}$

$= -6(9)^{n-1}$

منه : (v_n) متتالية هندسية أساسها 9 و حددا الأول $v_1 = -6$

إذن : $v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{9^n - 1}{9 - 1} \right)$

$= -6 \left(\frac{9^n - 1}{8} \right)$

$= \frac{-3}{4} (9^n - 1)$

التمرين 7

(u_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث $u_0 = 2$ و $u_3 = 9 u_1$

1 - عين أساس المتتالية (u_n)

2 - أحسب u_n بدلالة n

3 - أحسب بدلالة n المجموع $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

الحل 7

1 - ليكن k أساس هذه المتتالية حيث $k > 1$

لدينا : $u_1 = k u_0$ أي $u_1 = 2k$

و $u_2 = k(2k) = 2k^2$ أي $u_2 = k u_1$

و $u_3 = k(2k^2) = 2k^3$ أي $u_3 = k u_2$

من جهة أخرى $u_3 = 9 u_1$ أي

$$2k^3 = 9(2k)$$

$$k^2 = 9$$

$$k = -3 \text{ أو } k = 3$$

بما أن كل الحدود موجبة فإن أساس المتتالية موجب أي $k = 3$

2 - من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2(3)^n$

3 - مجموع الحدود المتتالية من متتالية هندسية :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n &= u_0 \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right) \\ &= -1(1 - 3^{n+1}) \\ &= 3^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

التمرين 8

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$

الحل 8

لاحظ أن كل حدود المتتالية (u_n) موجبة تماماً أي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$ و خاصة $u_n > -10^{-3}$ إذن يكفي تعيين عدد طبيعي n حيث $u_n < 10^{-3}$ كمايلي :

$$\text{لدينا } u_n < 10^{-3} \text{ أي } \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{n^{3/2}} < \frac{1}{10^3} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{n^{1/2}} < \frac{1}{10} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100} \quad \text{أي :}$$

$$n > 100 \quad \text{أي :}$$

نتيجة : يكفي أن يكون $n_0 = 100$ حيث إذا كان $n > 100$ فإن $u_n < 10^{-3}$ و عليه $-10^{-3} < u_n < 10^{-3}$ و هو المطلوب

التمرين 9

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = n\sqrt{n}$

أوجد عدد طبيعي n_0 حيث إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n > 10^6$

الحل 9

$$\text{لدينا } u_n > 10^6 \text{ أي : } n\sqrt{n} > 10^6$$

$$n^{3/2} > 10^6 \quad \text{أي :}$$

$$n^{1/2} > 10^2 \quad \text{أي :}$$

$$n > 10^4 \quad \text{أي :}$$

إذن يكفي أن نأخذ $n_0 = 10^4$ حيث إذا كان $n > 10^4$ فإن $u_n > 10^6$

التمرين 10

(u_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ و حدها الأول $u_0 = 3$

ابتداء من أي دليل n يكون $u_n < 10^{-5}$ ؟

الحل 10

$$\text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n : u_n = 3(1/2)^n$$

$$\text{إذن } u_n < 10^{-5} \text{ أي } 3(1/2)^n < 10^{-5}$$

$$(1/2)^n < \frac{1}{3 \times 10^5} \quad \text{أي :}$$

$$2^n > 3 \times 10^5 \quad \text{أي :}$$

$$n > \log_2(3 \times 10^5) \quad : \text{أي}$$

$$n > \frac{\ln(3 \times 10^5)}{\ln(2)} \quad : \text{أي}$$

$$n > \frac{\ln(3) + 5 \ln(10)}{\ln(2)} \quad : \text{أي}$$

$$n > 18.19 \quad : \text{أي}$$

إذن : يكفي أخذ $n_0 = 18$ حيث إذا كان $n > 18$ فإن $u_n < 10^{-5}$

التمرين 11

أحسب نهايات المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات التالية :

$$u_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2}{n + 3}} \quad -5 \quad u_n = \frac{3n + 2}{2n - 1} \quad -1$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + 2}{2n + 1} \quad -6 \quad u_n = 2n - \frac{1}{n + 1} \quad -2$$

$$u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1} \quad -7 \quad u_n = \frac{7n^2 - 3n + 2}{n^2 - n + 1} \quad -3$$

$$u_n = \sqrt{\frac{3n + 2}{2n + 1}} \quad -4$$

الحل 11

لاحظ أن في كل حالة يمكن تعريف دالة f للمتغير الحقيقي x حيث $f(n) = u_n$ ثم حساب النهايات كما يتم حسابها في الدوال العددية كمايلي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n + 2}{2n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} \quad -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \frac{1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \frac{1}{n} = +\infty \quad -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 - 3n + 2}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2}{n^2} = 7 \quad -3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3n + 2}{2n + 1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3n}{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad -4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2}{n + 3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad -5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + 2}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(1 + \frac{2}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 \quad -6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt{n} + 1)}{n(1 + \frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{1} = +\infty \quad -7$$

التمرين 12

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$

من بين الأعداد الحقيقية التالية 0 : 6 : 4,999 : 5 : ما هي التي تمثل عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

الحل 12

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\frac{10}{n^2} > 0$ منه $-\frac{10}{n^2} < 0$

$$= \frac{n+1 - (n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-1}{(n+2)(n+1)}$$

اذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

لدينا ايضا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-(n+1) - (2n+4)}{(2n+4)(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n}{2n^2}$$

$$= 0$$

خلاصة : $\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

اذن حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{و}$$

التمرين 15 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحل - 15

لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد $(-1)^n$ موجب إذا كان n زوجي و سالب إذا كان n فردي

و عليه فالمتتاليتان (u_n) و (v_n) لا يمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف

حذار: في هذا المثال 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ و لكهما متتاليتان غير منحورتان

التمرين 16

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

الحل - 16

لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما
و لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$\text{حسب العلاقة السابقة} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n+2n(2n+1) - 2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+4n^2+2n-4n^2-6n-2}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه المتتالية (v_n) متناقصة تماما

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n$$

و لدينا أيضا

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

(1)

خلاصة : $\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \end{array} \right\}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن : حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متحاورتان

التمرين 17

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $u_n = \frac{\ln n}{n}$ حيث \ln هو اللوغاريتم النيبيري

برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من الرتبة 3

الحل - 17

نعرف الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

لندرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x لدينا $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ من إشارة $1 - \ln x$ كمايلي :

x	0	e	3	$+$
$1 - \ln x$		0	-	

إذن : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; e[$ و متناقصة تماما على المجال $]e; +\infty[$

بما أن $f(n) = u_n$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ابتداء من الحد u_3 لأن $2 < e$ و $3 > e$

التمرين 18

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_n = \frac{5^n}{n!}$

أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحل 18

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{5^n}{n!} \\ &= \frac{5 \times 5^n}{(n+1) \times n!} - \frac{5^n}{n!} \\ &= \frac{5^n}{n!} \left(\frac{5}{n+1} - 1 \right) \\ &= \frac{5^n}{n!} \left(\frac{5-n-1}{n+1} \right) \\ &= \frac{5^n}{n!} \left(\frac{4-n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{5^n}{n!(n+1)} > 0$

إذن : إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $4 - n$ كما يلي

$$4 - n > 0 \Rightarrow 4 > n$$

$$4 - n < 0 \Rightarrow 4 < n$$

$$4 - n = 0 \Rightarrow 4 = n$$

إذن : ابتداء من u_5 فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما
حذار ! ابتداء من الحد u_4 فإن $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (لأن $u_5 = u_4$) أي المتتالية متناقصة

التمرين 19

أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $u_n = \frac{n!}{7^n}$ متزايدة ابتداء من رتبة يطلب تعيينها

الحل 19

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)!}{7^{n+1}} - \frac{n!}{7^n} \\ &= \frac{(n+1) \times n!}{7 \times 7^n} - \frac{n!}{7^n} \\ &= \frac{n!}{7^n} \left(\frac{n+1}{7} - 1 \right) \\ &= \frac{n!}{7^n} \left(\frac{n+1-7}{7} \right) \\ &= \frac{n!}{7^n} \left(\frac{n-6}{7} \right) \end{aligned}$$

لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{n!}{7^n} \times \frac{1}{7} > 0$

إذن : إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $n - 6$

$$n - 6 > 0 \Rightarrow n > 6$$

$$n - 6 < 0 \Rightarrow n < 6$$

$$n - 6 = 0 \Rightarrow n = 6$$

إذن : ابتداء من الحد u_7 فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_{n+1} - u_n > 0$

حذار ! ابتداء من الحد u_6 فإن المتتالية (u_n) متزايدة لأن $u_7 = u_6$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 0$

التمرين 20

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $4u_{n+1} - 2u_n = 9$

و (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = 2u_n - 9$

1 - أحسب الحدود $v_3 ; v_2 ; v_1 ; v_0 ; u_3 ; u_2 ; u_1$

- 2 - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية بطلب أساسها وحدها العام v_n بدلالة n
 3 - استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

الحل - 20

1 - لدينا : $4u_{n+1} - 2u_n = 9$ إذن : $4u_{n+1} = 2u_n + 9$ أي : $u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + 9)$

منه : $u_1 = \frac{1}{4}(2u_0 + 9) = \frac{1}{4}(4 + 9) = \frac{13}{4}$

$u_2 = \frac{1}{4}(2u_1 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{13}{2} + 9\right) = \frac{13 + 18}{8} = \frac{31}{8}$

$u_3 = \frac{1}{4}(2u_2 + 9) = \frac{1}{4}\left(\frac{31}{4} + 9\right) = \frac{31 + 36}{16} = \frac{67}{16}$

لدينا $v_n = 2u_n - 9$ إذن : $v_0 = 2u_0 - 9 = 4 - 9 = -5$

$v_1 = 2u_1 - 9 = \frac{13}{2} - 9 = \frac{13 - 18}{2} = \frac{-5}{2}$

$v_2 = 2u_2 - 9 = \frac{31}{4} - 9 = \frac{31 - 36}{4} = \frac{-5}{4}$

$v_3 = 2u_3 - 9 = \frac{67}{8} - 9 = \frac{67 - 72}{8} = \frac{-5}{8}$

2 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1} = 2u_{n+1} - 9$

$2\left[\frac{1}{4}(2u_n + 9)\right] - 9$

$\frac{1}{2}(2u_n + 9) - 9$

$= u_n + \frac{9}{2} - 9$

$= u_n - \frac{9}{2}$

$= \frac{1}{2}(2u_n - 9)$

$= \frac{1}{2}v_n$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ وحدها الأول $v_0 = -5$

منه : $v_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3 - لدينا $v_n = 2u_n - 9$ أي : $2u_n = v_n + 9$ أي : $u_n = \frac{1}{2}v_n + \frac{9}{2}$

منه : $u_n = \frac{1}{2}\left[-5\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ وهي عبارة u_n المطلوبة

لنبحث الآن عن المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + \dots + \left[\frac{9}{2} - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$= \frac{9}{2}(n+1) - 5\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$= \frac{9}{2}(n+1) - 5 \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right]$

$= \frac{9}{2}(n+1) + 5\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$ وهو المطلوب

التمرين - 21

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 14$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 3$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + 1$

1 - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الأول و عبارة حدها العام

2 - استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 - أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

الحل - 21

1 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= (4u_n + 3) + 1 \\ &= 4u_n + 4 \\ &= 4(u_n + 1) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول 15

$$v_n = 15 \times (4)^n$$

2 - لدينا $v_n = u_n + 1$ إذن : $u_n = v_n - 1$ أي : $u_n = 15(4)^n - 1$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ &= (v_0 - 1)^2 + (v_1 - 1)^2 + \dots + (v_n - 1)^2 \\ &= (v_0^2 - 2v_0 + 1) + (v_1^2 - 2v_1 + 1) + \dots + (v_n^2 - 2v_n + 1) \\ &= (v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2) - 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n+1) \text{ مرة}} \end{aligned}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v \left(\frac{(4)^{n+1} - 1}{4 - 1} \right) = 15 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{3} \right) = 5[4^{n+1} - 1]$$

نعرف المتتالية (t_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n = v_n^2$

$$t_n = (15 \times 4^n)^2 = 225 \times 16^n$$

إذن : (t_n) متتالية هندسية حدها الأول $t_0 = 225$ و أساسها 16

$$\begin{aligned} v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 &= t_0 + t_1 + \dots + t_n = t_0 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{16 - 1} \right) \\ &= 225 \times \left(\frac{16^{n+1} - 1}{15} \right) = 15(16^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 15 \times (16^{n+1} - 1) - 2 \times 5 \times (4^{n+1} - 1) + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 15 - 10 \times 4^{n+1} + 10 + n + 1 \\ &= 15 \times 16^{n+1} - 10 \times 4^{n+1} + n - 4 \end{aligned}$$

نتيجة :

التمرين - 22

(u_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $u_0 = 2/9$

أحسب المجموع $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{10}$

الحل - 22

$$S = u_3 \times \left(\frac{3^{10-3+1} - 1}{3 - 1} \right)$$

لنحسب u_3 :

$$u_3 = \frac{2}{9} \times 3^3 = 6 \quad \text{إذن : } u_n = u_0 \times 3^n$$

$$S = 6 \times \left(\frac{3^8 - 1}{2} \right) = 3(3^8 - 1) = 3^9 - 3$$

التمرين - 23

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$

أحسب بدلالة n المجموع : $u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الحل - 23

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_n &= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + \dots + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n) \\ &= (2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + \dots + 2 \times 3^n) + (3 \times 4^0 + 3 \times 4^1 + \dots + 3 \times 4^n) \\ &= 2(3^0 + 3^1 + \dots + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + \dots + 4^n) \\ &= 2 \left[3 \times \left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} \right) \right] + 3 \left[4 \times \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= (3^{n+1} - 1) + (4^{n+1} - 1) \\ = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

التمرين 24

$(u_n)_n$ متتالية حدها الأول $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} = 2u_n + 3$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (v_n) بـ $v_n = u_n + 3$

1 - أثبت أن v_n متتالية هندسية يطلب حدها العام

2 - أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ بدلالة n

3 - أثبت أن العدد $u_1 + u_2 + \dots + u_n + 3n$ مضاعف العدد 4 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

الحل 24

1 - من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \\ = 2u_n + 3 + 3 \\ = 2u_n + 6 \\ = 2(u_n + 3) \\ = 2v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_1 = u_1 + 3 = 4$

منه $v_n = 4 \times 2^{n-1}$ أي $v_n = 2^n$ و هي عبارة الحد العام لـ v_n

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad - 2$$

$$= v_1 \times \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) \\ = 4 \times (2^n - 1)$$

3 - لدينا : $v_n = u_n + 3$ إذن $u_n = v_n - 3$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_1 - 3) + (v_2 - 3) + \dots + (v_n - 3) \quad \text{منه :}$$

$$= (v_1 + v_2 + \dots + v_n) - \underbrace{3 - 3 - \dots - 3}_{n \text{ مرة}}$$

$$= S_n - 3n \\ = 4 \times (2^n - 1) - 3n$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + 3n = 4 \times (2^n - 1) - 3n + 3n \quad \text{إذن :}$$

$$= 4 \times (2^n - 1)$$

منه : العدد $u_1 + u_2 + \dots + u_n + 3n$ مضاعف 4

التمرين 25

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_0 = 2 ; u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} : n > 0 \end{cases}$$

1 - أوجد عددين حقيقيين a و b حيث $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$

2 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_{n+1} - au_n$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b

3 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = u_{n+1} - bu_n$

برهن أن (t_n) متتالية هندسية أساسها a

4 - أكتب كل من v_n و t_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحل 25

1 - إذا وجد عددين حقيقيين a و b يحققان $\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = 1 \end{cases}$ فإن a و b هما حلا المعادلة $x^2 - 4x + 1 = 0$ في R .

إذن لإيجادهما يكفي حل المعادلة كعالي :

$$\Delta = 16 - 4 = 12$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$b = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

ملاحظة : يمكن ان نأخذ $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2 - \sqrt{3}$

إذن نأخذ $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2 - \sqrt{3}$
2 - لدينا $v_n = u_{n+1} - a u_n$ أي :

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - (2 + \sqrt{3}) u_n \\ v_{n+1} &= u_{n+2} - (2 + \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (4 u_{n+1} - u_n) - (2 + \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (4 - 2 - \sqrt{3}) u_{n+1} - u_n \\ &= (2 - \sqrt{3}) u_{n+1} - u_n \\ &= (2 - \sqrt{3}) \left[u_{n+1} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} u_n \right] \\ &= b \left[u_{n+1} - \frac{1}{b} u_n \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b} = a \quad \text{إذن} \quad a b = 1 \quad \text{لأن} \quad \begin{aligned} &= b [u_{n+1} - a u_n] \\ &= b v_n \end{aligned}$$

منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $b = 2 - \sqrt{3}$
3 - لدينا $t_n = u_{n+1} - b u_n$ إذن :

$$\begin{aligned} t_n &= u_{n+1} - (2 - \sqrt{3}) u_n \\ t_{n+1} &= u_{n+2} - (2 - \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (4 u_{n+1} - u_n) - (2 - \sqrt{3}) u_{n+1} \\ &= (4 - 2 + \sqrt{3}) u_{n+1} - u_n \\ &= (2 + \sqrt{3}) u_{n+1} - u_n \\ &= a u_{n+1} - u_n \\ &= a \left(u_{n+1} - \frac{1}{a} u_n \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} = b \quad \text{إذن} \quad a b = 1 \quad \text{لأن} \quad \begin{aligned} &= a (u_{n+1} - b u_n) \\ &= a t_n \end{aligned}$$

منه (t_n) متتالية هندسية أساسها $a = 2 + \sqrt{3}$
4 - لدينا $v_0 = u_1 - a u_0$ إذن :

$$\begin{aligned} v_0 &= 4 - (2 + \sqrt{3}) \times 2 = -2\sqrt{3} \\ v_n &= -2\sqrt{3} \times (2 - \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= 4 - (2 - \sqrt{3}) \times 2 = 2\sqrt{3} \\ t_n &= 2\sqrt{3} \times (2 + \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

$$t_n - v_n = -b u_n - (-a u_n)$$

$$t_n - v_n = (a - b) u_n$$

$$u_n = \frac{t_n - v_n}{a - b}$$

$$u_n = \frac{2\sqrt{3} \times (2 + \sqrt{3})^n + 2\sqrt{3} \times (2 - \sqrt{3})^n}{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}$$

$$u_n = \frac{2\sqrt{3} \times [(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]}{2\sqrt{3}}$$

$$u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

و لدينا : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - a u_n \\ t_n = u_{n+1} - b u_n \end{cases}$ إذن :
أي :

أي :

منه :

أي :

أي :

التمرين 26 -

$a ; b ; c$ أعداد حقيقية غير معدومة

1 - بين أن إذا كانت $a ; b ; c$ بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c)$$

2 - أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 و مجموع مربعاتها هو 3276

الحل - 26

$$1 - \text{لدينا : } (a + b + c)(a - b + c) = a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2 = a^2 + 2ac - b^2 + c^2$$

إذا كانت $a ; b ; c$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا : $ac = b^2$

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ هو المطلوب}$$

2 - لتكن $a ; b ; c$ بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة

$$\begin{cases} a + b + c = 78 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3276 \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)(a - b + c) \text{ لكن حسب السؤال (1) فإن :}$$

$$3276 = 78(a - b + c)$$

$$a - b + c = 3276/78$$

$$a - b + c = 42$$

$$\begin{cases} a + b + c = 78 \text{(1)} \\ a - b + c = 42 \text{(2)} \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $2b = 36$ أي : $b = 18$

ليكن k أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k \in \mathbb{R}^*$

لدينا $a = b/k = 18/k$ و $c = bk = 18k$

$$\text{إذن المساواة (1) تصبح : } \frac{18}{k} + 18 + 18k = 78 \text{ نضرب الطرفين في } k :$$

$$18 + 18k + 18k^2 = 78k \text{ أي :}$$

$$18k^2 - 60k + 18 = 0 \text{ أي :}$$

$$3k^2 - 10k + 3 = 0 \text{ أي : و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول } k$$

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10+8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

لنختار مثلا $k = 3$

$$\text{إذن : } a = 18/3 = 6 \text{ و } c = 18 \times 3 = 54$$

$$\begin{cases} a + b + c = 6 + 18 + 54 = 78 \\ a - b + c = 6 - 18 + 54 = 42 \end{cases} \text{ تحقيق :}$$

لاحظ أن من أجل $k = 1/3$ نحصل على $a = 54$ و $b = 18$ و $c = 6$

خلاصة : الأعداد المطلوبة هي : $(a ; b ; c) = (6 ; 18 ; 54)$ أو $(a ; b ; c) = (54 ; 18 ; 6)$

التمرين 27 -

(α_n) متتالية هندسية منتهية كل حدودها موجبة حيث حدها الأول $\alpha_1 = 3$ و $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$

1 - عين أساس المتتالية (α_n) ثم حدها العام

2 - أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $\beta_n = \ln(\alpha_n)$ حيث \ln هو اللوغاريتم النيبيري

3 - برهن أن (β_n) متتالية حسابية يطلب أسسها و حدها العام β_n

4 - أحسب بدلالة n المجموع $t_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$

الحل - 27

1 - ليكن k أساس المتتالية (α_n) حيث $0 < k < 1$ (لأن حدودها موجبة و المتتالية منتهية)

لدينا : $\alpha_3 = \alpha_1 k^{3-1}$ أي : $\alpha_3 = 3 k^2$
 و : $\alpha_5 = \alpha_1 k^{5-1}$ أي : $\alpha_5 = 3 k^4$
 إذن : $\alpha_3 + \alpha_5 = 15/16$ تكافئ $3 k^2 + 3 k^4 = 15/16$
 تكافئ $k^2 + k^4 = 5/16$
 تكافئ $16 k^4 + 16 k^2 - 5 = 0$ وهي معادلة مضاعفة الترتيب

نضع $t = k^2$ حيث $t \geq 0$
 نحل المعادلة $16 t^2 + 16 t - 5 = 0$ كما يلي . $(4 \times 6)^2$ 16×36 $16(16 + 20)$ $\Delta = 16^2 + 20 \times 16 = 16(16 + 20)$

إذن : $\begin{cases} t_1 = \frac{-16+24}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \\ t_2 = \frac{-16-24}{32} = \frac{-40}{32} \end{cases}$ مرفوض

منه : $k^2 = 1/4$ أي $k = 1/2$ لأن $k > 0$

نتيجة : (α_n) متتالية هندسية أساسها $1/2$ وحدها الأول 3 إذن $\alpha_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 — 2 $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$$= \alpha_1 \times \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 3 \times \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$= 6 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

3 — لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \ln(\alpha_{n+1}) \\ &= \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \ln 3 + n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

أي : $\beta_n = \ln 3 + (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

منه : (β_n) متتالية حسابية حدها الأول $\beta_1 = \ln 3$ و أساسها $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$t_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$$

$$= \frac{n}{2} \times (\beta_1 + \beta_n)$$

$$= \frac{n}{2} \left[\ln 3 + \ln 3 + (n-1) \ln \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{n}{2} [2 \ln 3 - (n-1) \ln 2]$$

$$= n \ln 3 - \frac{n(n-1)}{2} \ln 2$$

التمرين 28

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع $A_n = \underbrace{111 \dots 1}_n$ مرة n

أحسب بدلالة n العدد $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

الحل — 28

لاحظ أن العدد A_n هو حد عام لمتتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$A_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $A_{n+1} = A_n + 10^n$ بهذه الطريقة لدينا الكتابات التالية :

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= A_1 + 10 \\ A_3 &= A_2 + 10^2 \\ \oplus \quad A_4 &= A_3 + 10^3 \\ &\vdots \\ A_n &= A_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

يجمع هذه المساواة طرف لطرف نحصل على :
 $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n = A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}$
 أي : $A_n = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}$

لاحظ أن $1; 10; 10^2; \dots; 10^{n-1}$ هي حدود متتابعة من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها 10

إذن : $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} = 1 \times \left[\frac{10^n - 1}{10 - 1} \right] = \frac{10^n - 1}{9}$

منه : $A_n = \frac{10^n - 1}{9}$ أي : $A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9}$

لنكتب هذه الحدود كمايلي :

$$A_1 = \frac{1}{9} \times 10^1 - \frac{1}{9}$$

$$A_2 = \frac{1}{9} \times 10^2 - \frac{1}{9}$$

$$\oplus \quad A_3 = \frac{1}{9} \times 10^3 - \frac{1}{9}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{1}{9} \times 10^n - \frac{1}{9}$$

يجمع هذه المساواة نحصل على :

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \frac{1}{9} [10^1 + 10^2 + \dots + 10^n] - \frac{1}{9} \times n$$

$$= \frac{1}{9} \left[10 \times \left(\frac{10^n - 1}{10 - 1} \right) \right] - \frac{n}{9}$$

$$S_n = \frac{10}{81} (10^n - 1) - \frac{n}{9} \text{ و هي عبارة المجموع}$$

مثلا : $A_1 = 1$; $A_2 = 11$; $A_3 = 111$; إذن : $A_1 + A_2 + A_3 = 123$

و بتطبيق العلاقة الناتجة فإن :

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{10}{81} (10^3 - 1) - \frac{3}{9}$$

$$\frac{10 \times 999}{9 \times 9} - \frac{3}{9}$$

$$= \frac{10 \times 111}{9} - \frac{3}{9}$$

$$\frac{1110 - 3}{9}$$

$$\frac{1107}{9}$$

$$123$$

التمرين 29

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = -2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان حيث $\alpha \neq 0$

1 - أوجد الأعداد α و β والتي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة .
نفرض أن المتتالية (u_n) ليست ثابتة و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n = u_n + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي غير معوم .

2 - عين λ بدلالة α و β حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3 - نضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

أحسب المجموعين S_n و t_n بدلالة n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

الحل 29

1 - تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1} = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\alpha u_n + \beta = u_n$

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $(\alpha - 1) u_n + \beta = 0$

بالمطابقة نحصل على $\left. \begin{array}{l} \alpha - 1 = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right\}$ أي : $\alpha = 1$ و $\beta = 0$

2 - لنكن (u_n) متتالية ليست ثابتة أي : $(\alpha ; \beta) \neq (1 ; 0)$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda$ أي : $v_{n+1} = \alpha u_n + \beta + \lambda$

أي : $v_{n+1} = \alpha \left(u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha} \right)$ حيث $\alpha \neq 0$

تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$u_n + \frac{\beta + \lambda}{\alpha} = u_n + \lambda$ أي : $\lambda = \frac{\beta + \lambda}{\alpha}$

أي : $\alpha \lambda = \beta + \lambda$

أي : $\lambda(\alpha - 1) = \beta$

أي : $\lambda = \frac{\beta}{\alpha - 1}$ حيث $\alpha \neq 1$

و عليه (v_n) متتالية هندسية أساسها α وحدها الأول $v_0 = u_0 + \lambda = -2 + \frac{\beta}{\alpha - 1}$

3 - بوضع $\alpha = 3$ ؛ $\beta = 2$ ؛ $\lambda = 1$

لاحظ أن : $\frac{\beta}{\alpha - 1} = \frac{2}{3 - 1} = 1$ إذن : $\lambda = \frac{\beta}{\alpha - 1}$

منه : الأعداد α ؛ β و λ تحقق شروط السؤال (2) أي (v_n) متتالية هندسية أساسها $\alpha = 3$ وحدها الأول

$$v_0 = -2 + \lambda = -1$$

إذن : $(v_n) = -1(3)^n$

منه :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$v_i \times \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} \right)$$

$$= -1 \left(\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} [1 - 3^{n+1}]$$

و لدينا : $v_n = u_n + \lambda$ أي $v_n = u_n + 1$ منه : $u_n = v_n - 1$

إذن : $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + \dots + (v_n - 1)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 1 \times (n + 1)$$

$$= S_n - n - 1$$

$$= \frac{1}{2} [1 - 3^{n+1}] - n - 1$$

مثال : $u_0 = -2$ ؛ $u_1 = \alpha u_0 + \beta = 3(-2) + 2 = -4$ ؛ إذن : $u_0 + u_1 = -2 - 4 = -6$

بتطبيق العلاقة الناتجة : $u_0 + u_1 = \frac{1}{2} [1 - 3^2] - 1 - 1 = -4 - 2 = -6$

التمرين 30

في كل حالة من الحالات التالية أحسب نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بحددها العام .

$$u_n = \frac{e^{-n} - 1}{2e^{-n} + 1} \quad -6 \quad u_n = e^{1-n} \quad -1$$

$$\text{من أجل } n > 1 \quad u_n = \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) \quad -7 \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) \quad -2$$

$$u_n = \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) \quad -8 \quad u_n = (n+2)e^{-n} \quad -3$$

$$u_n = \frac{2^n}{5^n} - 1 \quad -9 \quad u_n = \ln(3 + e^{2-n}) \quad -4$$

$$u_n = \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} \quad -5$$

الحل 30

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^n} \quad -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \quad \text{لأن } 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \quad -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \quad \text{لأن } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (ne^{-n} + 2e^{-n}) \quad -3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \quad \text{لأن } = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3 + e^{2-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(3 + \frac{e^2}{e^n}\right) \quad -4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3) = \ln(3)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 6}{2e^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \left(1 - \frac{6}{e^n}\right)}{e^n \left(2 + \frac{1}{e^n}\right)} \quad -5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-0}{2+0}\right) = 1/2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - 1}{2e^n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^n} - 1}{\frac{2}{e^n} + 1} \quad -6$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن } = -1/1 = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^n - 3}{e^n + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1 - \frac{3}{e^n}\right)}{e^n\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)}\right) \quad - 7$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1-0}{1+0}\right) \\ = \ln 1 \\ = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^n + 2}{e^{2n} + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^n\left(1 + \frac{2}{e^n}\right)}{e^n\left(e^n + \frac{1}{e^n}\right)}\right) \quad - 8$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+0}{e^n+0}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \quad \text{لأن} \quad = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{5^n} - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 \quad - 9$$

$$(-1 < \frac{2}{5} < 1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad = -1$$

التمرين 31

(u_n) و (v_n) متتابعتان عدديتان معرفتان على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n + 1}$

و $v_n = \frac{1}{u_n}$ (حيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \neq 0$)

1- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2- برهن أن (v_n) متتالية حسابية ثم اكتب عبارة حدها العام .

3- استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل 31

1- لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$

لنبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كماليلي :

$$\text{من أجل } n=1 \text{ لدينا } u_1 = \frac{u_0}{3u_0 + 1} = \frac{2}{6+1} = \frac{2}{7} > 0 \text{ و } 2/7 > 0$$

إن الخاصية محققة من أجل $n=0$ و $n=1$ (لأن $u_0 = 2$ و $2 > 0$)

لنفرض أن $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_n > 0$ إذن : $3u_n > 0$ إذن : $3u_n + 1 > 1$ و خاصة $3u_n + 1 > 0$

منه : $\frac{1}{3u_n + 1} > 0$ و بضرب طرفي هذه المتباينة في $u_n > 0$ حيث نحصل على $\frac{u_n}{3u_n + 1} > 0$

أي $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} \\ = \frac{1}{\frac{u_n}{3u_n + 1}}$$

$$= \frac{3u_n + 1}{u_n}$$

$$= 3 + \frac{1}{u_n}$$

$$3 + v_n$$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{2}$

$$\text{منه: } v_n = \frac{1}{2} + 3n$$

$$3 - \text{ لدينا: } \frac{1}{u_n} = v_n \quad \text{إذن: } u_n = \frac{1}{v_n} \quad \text{أي } u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n}$$

$$\text{منه: } 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 3n}$$

التمرين 32

(u_n) و (v_n) متالتيتان معرفتان على \mathbb{N} بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$ و $v_n = u_n + 3$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1 - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حدها العام.

2 - عين نهاية كل من المتالتيات (u_n) و (S_n) و (t_n)

الحل 32

1 - من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$= \frac{1}{3}u_n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(u_n + 3)$$

$$= \frac{1}{3}v_n$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $1/3$ و حدها الأول $v_0 = u_0 + 3 = 5$

$$\text{منه: } v_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$2 - \text{ لدينا: } v_n = u_n + 3 \quad \text{إذن: } u_n = v_n - 3 \quad \text{أي } u_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$$\text{منه: } -3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \times \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= 5 \times \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}{-2/3}$$

$$= -\frac{15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{لذا } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{15}{2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right] = \frac{15}{2}$$

و لدينا أيضا : $t_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= (v_0 - 3) + (v_1 - 3) + \dots + (v_n - 3)$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 3(n+1)$$

$$= S_n - 3(n+1)$$

$$= S_n - 3n - 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 15/2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 15/2 \end{array} \right\} \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - 3n - 3 = -\infty \quad \text{منه :}$$

التمرين 33

عين نهايات كل من المتتاليات (u_n) : (v_n) : (w_n) : (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كمايلي :

$$t_n = \frac{v_n - 1}{w_n - 1} \quad ; \quad w_n = u_n - n \quad ; \quad v_n = \frac{u_n}{n} \quad ; \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$$

الحل - 33

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n(n + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 1} - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{n + 1} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - 1}{w_n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_n}{n} - 1}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_n - n}{n}}{u_n - n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\frac{n^2 + 1}{n + 1} - n}{n}}{\frac{n^2 + 1}{n + 1} - n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n + 1}}{\frac{n^2 + 1 - n^2 - n}{n + 1}} \times \frac{1}{n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n}{n(n + 1)} \times \frac{n + 1}{-2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n}{-2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{-2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$$

$$= 0$$

ملاحظة : يمكن إيجاد نهاية t_n باستعمال نهاية w_n و v_n كمايلي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - 1 = 0 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - 1 = -2 \quad \text{إذن :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0 \quad \text{أي} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - 1}{w_n - 1} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{منه :}$$

التمرين - 34

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ $u_n = \frac{1}{n!}$

$$0! = 1$$

حيث $n > 0$ من أجل $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

1 - أحسب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n) .

2 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

2 - استنتج نهاية المتتالية u_n .

الحل - 34

$$u_1 = \frac{1}{1!} = 1 \quad -1$$

$$u_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$u_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{24}$$

$$u_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{120}$$

2 - نستعمل الاستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 1$ الخاصية محققة لأن $u_1 = 1$ و $0 < 1 \leq 1/1$

نفرض أن $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ من أجل $n > 1$

$$\text{هل} \quad 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad ?$$

$$\text{لدينا :} \quad \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{نص :} \quad u_{n+1} > 0 \quad (1) \dots$$

لنحسب الفرق $u_{n+1} - \frac{1}{n+1}$ كمايلي :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)n!} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n!} - 1 \right] \end{aligned}$$

نكن $n! \geq 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$\text{إذن :} \quad \frac{1}{n!} \leq 1 \quad \text{منه :} \quad \frac{1}{n!} - 1 \leq 0$$

$$\text{أي :} \quad \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{n!} - 1 \right] \leq 0$$

$$\text{أي :} \quad u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \leq 0$$

$$\text{أي :} \quad u_{n+1} < \frac{1}{n+1} \quad (2) \dots\dots\dots$$

من المتباينتين (1) و (2) فإن $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ أي الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 < u_n \leq 1/n$

3 - لدينا : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$ إذن : $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ لكن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

إذن : $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

التمرين - 35
 $u_n = \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}} \rightarrow n$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

1 - تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2 - استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

الحل - 35

1 - نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

إذن : $-1 \leq \cos(3n - \pi) \leq 1$ (1)

نصرب المتباينة (1) في العدد الموجب $\frac{1}{\sqrt{n}}$ فنحصل على :

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(3n - \pi)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ أي $\frac{-1}{\sqrt{n}} < u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ و هو المطلوب

2 - لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$

إذن : $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 0$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

التمرين - 36

$u_n = n + 1 - \cos \frac{n\pi}{5}$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $n \leq u_n \leq n + 2$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل - 36

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

أي : $-1 \leq -\cos x \leq 1$

منه : $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

و خاصة لدينا : $0 \leq 1 - \cos \frac{n\pi}{5} \leq 2$

نضيف n إلى الأطراف : $n \leq n + 1 - \cos \frac{n\pi}{5} \leq n + 2$

أي : $n \leq u_n \leq n + 2$ و هو المطلوب

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ و $u_n \geq n$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

التمرين - 37

$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

برر أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 30 يكون $u_n \geq 2^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

الحل - 37

لدينا : $n \geq 30$ إذن : $\frac{n}{10} \geq \frac{30}{10}$

إذن : $\frac{n}{10} \geq 3$

منه : $\frac{n}{10} - 1 \geq 3 - 1$

$$\frac{n}{10} - 1 \geq 2 \quad \text{أي :}$$

$$\left(\frac{n}{10} - 1\right)^n \geq 2^n \quad \text{منه :}$$

$$\text{أي : } u_n \geq 2^n \text{ و هو المطلوب}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{فإن : } u_n \geq 2^n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

التمرين - 38

1 - برهن أن ابتداء من رتبة معينة يطلب تعيينها يكون $2^n \leq (n-1)!$

2 - بين أن المتتالية (u_n) ذات الحد العام $\frac{2^n}{n!}$ متقاربة .

الحل - 38

- 1

n	2^n	$(n-1)!$
1	2	1
2	4	1
3	8	2
4	16	6
5	32	24
6	64	120
7	128	720

لاحظ أن ابتداء من $n=6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع كمايلي :

من أجل $n=6$: الخاصية محققة حسب الجدول السابق

نفرض أن $2^n \leq (n-1)!$ من أجل $n > 6$

هل $2^{n+1} \leq (n+1-1)!$ أي هل $2^{n+1} \leq n!$

لدينا : $2^n \leq (n-1)!$ (1) حسب فرضية التراجع .

و $2 \leq n$ (2) لأن البرهان من أجل $n > 6$

نضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على : $2 \times 2^n \leq n(n-1)!$

$$2^{n+1} \leq n! \quad \text{أي :}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 6$ فإن $2^n \leq (n-1)!$

2 - لتكن المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_n = \frac{2^n}{n!}$

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} \quad \text{لدينا من أجل } n \geq 6 \text{ فإن } 2^n \leq (n-1)! \text{ إذن :}$$

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n \times (n-1)!} \quad \text{أي :}$$

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n} \quad \text{أي :}$$

$$u_n \leq \frac{1}{n} \text{ من أجل } n \geq 6 \quad \text{أي :}$$

لما يؤول n إلى $+\infty$ فإن $n \gg 6$ إذن : $u_n \leq 1/n$

$$\text{لكن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{إذن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ لأن } u_n > 0$$

منه : المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

التمرين - 39

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

1 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2- برر أن المتتالية (u_n) متقاربة و أن نهايتها ℓ أكبر من أو يساوي 2

3- بين أن النهاية ℓ تحقق $\ell = \sqrt{2 + \ell}$ ثم استنتج قيمة ℓ

الحل - 39

1- الاستدلال بالتراجع :

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{7} \quad \text{من أجل } n=1 \text{ لدينا :}$$

بما أن $2 \leq \sqrt{7} \leq 5$ فإن $2 \leq u_1 \leq u_0$ أي الخاصية محققة من أجل $n=1$

نفرض أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ من أجل $n > 1$

$$\text{هل } 2 \leq u_{n+1+1} \leq u_{n+1}$$

أي هل $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$4 \leq 2 + u_{n+1} \leq 2 + u_n \quad \text{منه :}$$

$$\sqrt{4} \leq \sqrt{2 + u_{n+1}} \leq \sqrt{2 + u_n} \quad \text{منه :}$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \quad \text{أي :}$$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

2- حسب السؤال (1) لدينا : $u_n \geq 2$ إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ 2

و لدينا أيضا : $u_{n+1} \leq u_n$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

نتيجة : (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة إذن : هي متتالية متقاربة .

و لتكن ℓ نهايتها إذن : $\ell \geq 2$ لأن 2 هو الحد الأسفل للمتتالية .

3- لدينا : لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = u_n$ أي $\sqrt{2 + u_n} = u_n$

$$\sqrt{2 + \ell} = \ell \quad \text{و في هذه الحالة } u_n \text{ يؤول إلى } \ell \text{ أي :}$$

إذن : يكفي حل المعادلة $\sqrt{2 + \ell} = \ell$ كمايلي :

$$2 + \ell = \ell^2 \quad \text{المعادلة تكافئ}$$

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \quad \text{أي :}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\left(\begin{array}{l} \ell_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \ell_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{array} \right) \quad \text{مرفوض (نبحث عن } \ell \text{ حيث } \ell \geq 2)$$

نتيجة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

التمرين - 40

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N}^* بـ $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \ln(x+1) - x$

2- استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن $\ln(k+1) - \ln(k) \leq 1/k$

ثم استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $\ln(n+1) \leq u_n$

3- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

الحل - 40

1- تغيرات الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

$$f(x) = \ln(x+1) - x$$

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{x}{x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left(-\frac{1}{x+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$= -\infty$$

f دالة قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

لاحظ أن : $\frac{x}{x+1} \geq 0$ لأن $x \geq 0$ و $x+1 > 0$ إذن : $\frac{-x}{x+1} \leq 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$-\infty$

2 - حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \leq 0$

أي : $\ln(x+1) - x \leq 0$

أي : $\ln(x+1) \leq x$ (α)

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ إذن : $1/k > 0$ أي $1/k \in]0; +\infty[$

منه : $\ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) \leq \frac{1}{k}$ حسب الخاصية (α)

أي : $\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

أي : $\ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ و هو المطلوب

لدينا من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$ فإن $\ln(k+1) - \ln k \leq 1/k$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $k=1$; $k=2$; $k=3$; ; $k=n$ كمايلي :

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq 1/2$$

$$\oplus \quad \ln(4) - \ln(3) \leq 1/3$$

$$\vdots$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq 1/n$$

بجمع هذه المتباينات طرف لـ طرف : نحصل على :

$$-\ln(1) + \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\ln(n+1) \leq u_n \quad \text{و هو المطلوب .}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{لأن} \quad u_n \geq \ln(n+1) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

التمرين 41 -

1 - و (v_n) متالتان معرفتان على \mathbb{N}^* $\rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $v_n = \frac{1}{n}$

2 - ثبت أن 1 عنصر حد من الأعلى للمتتالية (u_n) .

3 - ثبت أن من أجل كل n من \mathbb{N}^* فإن $u_n < v_n$

4 - هل المتالتين (u_n) و (v_n) محدودتين

التمرين 41 -

1 - ثبت : $n > 0$: $n^2 > 0$

$$n^2 + 1 > 1 \quad : \text{ إذن } :$$

$$\sqrt{n^2 + 1} > 1 \quad : \text{ إذن } :$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} < 1 \quad : \text{ إذن } :$$

أي : $u_n < 1$ أي العدد 1 عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n)

2 - لاحظ أن من أجل كل n من \mathbb{N}^* فإن $\frac{1}{n} > 0$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} > 0$

أي $u_n > 0$ و $v_n > 0$ و عليه يكفي مقارنة $(u_n)^2$ و $(v_n)^2$ كما يلي :

$$(v_n)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad \text{و} \quad (u_n)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right)^2 = \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2} \quad : \text{ لدينا } :$$

$$(u_n)^2 < (v_n)^2 \quad : \text{ إذن } :$$

$$u_n < v_n \quad : \text{ منه } : \quad (\text{لأن } u_n > 0 \text{ و } v_n > 0)$$

لدينا حسب السؤال (1) : $u_n < 1$: إذن : $0 < u_n < 1$
و من جهة أخرى : $u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) محدودة

$$n \geq 1 \quad : \text{ و لدينا أيضا } :$$

$$1/n \leq 1 \quad : \text{ إذن } :$$

$$v_n \leq 1 \quad : \text{ أي } :$$

$$0 < v_n \leq 1 \quad : \text{ منه } : \quad \text{إذن : المتتالية } (v_n) \text{ محدودة}$$

التمرين 42 -

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$u_n = \ln(1 + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

1 - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

2 - أعط عبارة مختصرة للحد u_n .

3 - هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

الحل - 42

1 - لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1} - u_n = \left[\ln(1 + 1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right] - \left[\ln(1 + 1) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$1 + \frac{1}{n+1} > 1 \quad \text{فإن} \quad \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > \ln 1 \quad \text{إذن}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0 \quad : \text{ أي } :$$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2 - لاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) = \ln 3 - \ln 2 \quad : \text{ مثلا } :$$

إذن : بتطبيق هذه الخاصية من أجل $k=2 ; k=3 ; k=4 ; k=5 ; \dots ; k=n$ نحصل على :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
 &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n+1) - \ln n \\
 &= \ln(n+1)
 \end{aligned}$$

أخيرا : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$ ملاحظة : يمكن إثبات هذه الخاصية بالتراجع كما يلي :

$$u_n = \ln(1+1) = \ln 2 \quad \text{لدينا : } n=1$$

$$\ln(n+1) = \ln(1+1) = \ln 2 \quad \text{و}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

نفرض أن $u_n = \ln(n+1)$ من أجل $n > 1$

$$\text{هل } u_{n+1} = \ln(n+1+1) \quad ?$$

$$u_{n+1} = \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= u_n + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$u_n = \ln(1+n) \quad \text{لأن } = \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)$$

$$= \ln(n+1) + \ln(n+1+1) - \ln(n+1)$$

$$= \ln(n+1+1)$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = \ln(n+1)$

$$3 - \text{لدينا : } n \geq 1 \quad \text{إذن : } n+1 \geq 2 \quad \text{منه : } \ln(n+1) \geq \ln 2 \quad \text{أي } u_n \geq \ln 2$$

إذن : المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\ln 2$

$$\text{لكن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

إذن : المتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى .

نتيجة : المتتالية (u_n) ليست محدودة .

تمرين 43

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \quad \text{متتالية معرفة على } \mathbb{N}^* \rightarrow$$

1 - هل العدد $3/2$ هو عنصر حد من الأعلى للمتتالية (u_n) ؟

2 - برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة .

$$3 - \text{أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

الحل - 43

1 - لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابة من متتالية هندسية أساسها $1/3$ و حددا الأول 1

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} \quad \text{أي : } u_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$u_n = \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \quad \text{أي :}$$

$$0 \leq 1/3 \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$-1 \leq -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$0 \leq 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$0 \leq \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \leq \frac{3}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$0 \leq u_n \leq 3/2 \quad \text{أي}$$

منه : العدد $3/2$ هو حد أعلى للمتتالية (u_n) .

2 - لدينا من أجل كل n من \mathbb{N}^* فإن :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

نما أن $\frac{1}{3^{n+1}} > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماماً .

نتيجة : (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى إذن : هي متتالية متقاربة .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \quad -3$$

التمرين - 44

(u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = e^{-u_n}$
برهن أن ابتداء من الدليل 2 تكون المتتالية (u_n) محدودة بالعدين 0 و 1

الحل - 44

لنبرهن عن الخاصية : من أجل كل n من $\mathbb{N} - \{0; 1\}$ فإن $0 \leq u_n \leq 1$
باستعمال الاستدلال بالتراجع كمايلي :

من أجل $n = 2$ لدينا : حيث $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

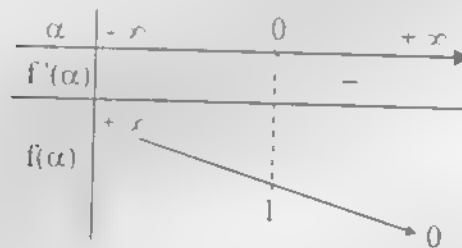
$$u_1 = e^{-\alpha} \quad \text{إذن :}$$

$$u_2 = e^{-u_1} = e^{-e^{-\alpha}} \quad \text{إذن :}$$

لندرس تغيرات الدالة f حيث $f(\alpha) = e^{-\alpha}$ من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ كمايلي :

f معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $f'(\alpha) = -e^{-\alpha}$

إذن : من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $f'(\alpha) < 0$



من جدول التغيرات نستنتج أن : من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq f(\alpha) \leq 1$

أي من أجل كل $\alpha > 0$ فإن $0 \leq e^{-\alpha} \leq 1$

إذن : من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن $0 \leq e^{-e^{-\alpha}} \leq 1$ (لأن $e^{-\alpha} > 0$)

أي $0 \leq u_2 \leq 1$

منه : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

نفرض أن $0 \leq u_n \leq 1$ من أجل $n > 2$

هل $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ؟

لدينا : $0 \leq u_n \leq 1$ إذن : $-1 \leq -u_n \leq 0$

$$e^{-1} \leq e^{-u_n} \leq e^0 \quad \text{إذن :}$$

$$1/e \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{أي}$$

لكن $1/e > 0$ إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ فإن $0 \leq u_n < 1$ أي المتتالية (u_n) محصورة بين 0 و 1

التمرين - 45

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} : $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$

1 - ماهو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

3- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) محدودة .

الحل - 45

1- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{4^{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{4^{n+1}} > 0$$

منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

2- لاحظ أن u_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $1/4$ وحدها الأول 1

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \quad \text{إذن :}$$

$$= 1 \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right)$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$= \frac{-4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{و هو المطلوب}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] = \frac{4}{3} \quad - 3$$

نتيجة : لدينا كل حدود المتتالية (u_n) أكبر أو تساوي 1 و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4/3$ و (u_n) متزايدة

إذن : $1 \leq u_n \leq 4/3$ أي المتتالية (u_n) محدودة بـ $4/3$ و 1 .

تمرين - 46

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 5$$

1- برر أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 1$ ماذا تستنتج ؟

2- نفرض أن المتتالية (u_n) متقاربة ونهايتها l . أكتب معادلة من الدرجة الثانية تكون محققة من أجل l . ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

الحل - 46

1- من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 5 - u_n = u_n^2 - 4u_n + 5$$

لندرس تغيرات الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$\text{لدينا : } f'(x) = 2x - 4 \quad \text{و إشارتها :}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2x - 4$		$-$	0	$+$

منه : جدول تغيرات الدالة f كمايلي :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $f(x) \geq 1$

$$\text{أي : } x^2 - 4x + 5 \geq 1$$

إذن : من أجل كل حد u_n من حدود المتتالية (u_n) فإن $u_n^2 + 4u_n + 5 \geq 1$ أي $u_{n+1} - u_n \geq 1$ و هو المطلوب .

نتيجة : $u_{n+1} - u_n > 0$ وخاصة $u_{n+1} - u_n \geq 1$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

$$2 - \text{ لنفرض أن } (u_n) \text{ متقاربة حيث } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن $u_{n+1} = \ell$ و $u_n = \ell$

$$\text{أي : } \ell = \ell^2 - 3\ell + 5$$

أي : $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$ و هي المعادلة المطلوبة .

لكن لا يوجد أي عدد حقيقي ℓ يحقق المعادلة $\ell^2 - 4\ell + 5 = 0$

لأن حسب السؤال السابق : $\ell^2 - 4\ell + 5 \geq 1$ من أجل كل $\ell \in \mathbb{R}$

و عليه فإن العدد ℓ غير موجود أي المتتالية (u_n) ليست متقاربة .

و منه : المتتالية (u_n) متباعدة .

التمرين 47

(u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1 - أحسب الحدين u_1 و u_2

2 - برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

3 - عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب حدها العام ثم الحد العام للمتتالية (u_n) .

4 - هل المتتالية (u_n) محدودة ؟

5 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_0 + \frac{u_1}{4} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

برهن أن المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد $17/3$

الحل - 47

$$1 - \text{ لدينا : } u_1 = 3u_0 - 4 = 3\left(\frac{11}{4}\right) - 4 = \frac{33 - 16}{4} = \frac{17}{4}$$

$$u_2 = 3u_1 - 4 = 3\left(\frac{17}{4}\right) - 4 = \frac{51 - 16}{4} = \frac{35}{4}$$

2 - لنبرهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

• من أجل $n=1$ و $n=2$ لاحظ أن $u_2 > u_1$ إذن : المتتالية متزايدة تماما .

نفرض أن $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل $n > 2$ (أي (u_n) متزايدة تماما من أجل $n > 2$)

$$\text{هل : } u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

$$\text{لدينا : } u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 4) - (3u_n - 4)$$

$$= 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4$$

$$= 3(u_{n+1} - u_n)$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن : $3(u_{n+1} - u_n) > 0$

$$\text{أي : } u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n+2$

نتيجة : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3 - من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha$

$$= 4(3u_n - 4) + \alpha$$

$$= 12u_n - 16 + \alpha$$

$$= 3\left(4u_n + \frac{\alpha - 16}{3}\right)$$

إذن : تكون (v_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\alpha - 16}{3} = \alpha$$

$$\text{أي } 4u_n + \frac{\alpha - 16}{3} = 4u_n + \alpha$$

$$3\alpha = \alpha - 16 \quad \text{أي}$$

$$2\alpha = -16 \quad \text{أي}$$

$$\alpha = -8 \quad \text{أي}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول 3 $v_0 = 4u_0 - 8 = 4\left(\frac{11}{4}\right) - 8 = 3$

$$v_n = 3^{n+1} \quad \text{أي} \quad v_n = 3 \times 3^n \quad \text{منه}$$

$$u_n = \frac{v_n - \alpha}{4} \quad \text{إذن} \quad 4u_n = v_n - \alpha \quad \text{لدينا} \quad v_n = 4u_n + \alpha$$

$$u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1} \quad \text{أي} \quad u_n = \frac{3^{n+1} + 8}{4} \quad \text{منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1} = +\infty \quad \text{لدينا} \quad 4$$

و عليه فالمتتالية (u_n) ليست محدودة من الأعلى إذن فهي ليست محدودة .

$$u_n = 2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1} \quad \text{لدينا} \quad 5$$

$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{2 + \frac{1}{4} \times 3^{n+1}}{4^n} \quad \text{منه}$$

$$\frac{2}{4^n} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$w_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \dots + \frac{u_n}{4^n} \quad \text{إذن}$$

$$= \left[2 \times \frac{1}{4^0} + \left(\frac{3}{4}\right)^1\right] + \left[2 \times \frac{1}{4^1} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + \dots + \left[2 \times \frac{1}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{4^0} + 2 \times \frac{1}{4^1} + \dots + 2 \times \frac{1}{4^n}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] + \left[\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{4}\right) - 1} + \frac{3}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$= \frac{-4}{3} \times 2 \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right] - 4 \times \frac{3}{4} \times \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] + 3 \times \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$\text{بما أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{لأن} \quad 0 < \frac{1}{4} < 1 \quad \text{و} \quad 0 < \frac{3}{4} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{8}{3} \times (1 - 0) + 3 \times (1 - 0) \quad \text{فإن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3} \quad \text{أي}$$

أي: المتتالية (w_n) متقاربة نحو العدد $17/3$.

تمرين - 48

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = u_n - v_n$

- 1 - برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب حدها العام و نهايتها .
- 2 - عبر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ثم استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .
- 3 - بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية التي نرمز لها بـ ℓ
- 4 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $t_n = 3u_n + 10v_n$ برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج قيمة ℓ .

الحل = 48

1 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 4v_n}{5} \\ &= \frac{5u_n + 10v_n - 3u_n - 12v_n}{15} \\ &= \frac{2u_n - 2v_n}{15} \\ &= \frac{2}{15} (u_n - v_n) \\ &= \frac{2}{15} w_n \end{aligned}$$

اذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $2/15$ و حدها الأول -1 $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$

منه : $w_n = -\left(\frac{2}{15}\right)^n$

أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 2/15 \leq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n \quad -2$$

$$= \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3}$$

$$= \frac{2v_n - 2u_n}{3}$$

$$= \frac{-2}{3} (u_n - v_n)$$

$$= \frac{-2}{3} w_n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$$

$$= \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{5}$$

$$= \frac{1}{5} (u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{5} w_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3} w_n = \frac{-2}{3} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{15}\right)^n \quad \text{لدينا:}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه : المتتالية (u_n) متزايدة تماماً .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5} w_n = \frac{1}{5} \times \left(-\left(\frac{2}{15}\right)^n\right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{2}{15}\right)^n \quad \text{و لدينا:}$$

إذن : $v_{n+1} - v_n < 0$ منه : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .

3 - من جهة أخرى لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

نتيجة : $\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

منه : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية و لتكن ℓ

4 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $t_{n+1} = 3 u_{n+1} + 10 v_{n+1}$

$$3 \times \left(\frac{u_n + 2 v_n}{3} \right) + 10 \times \left(\frac{u_n + 4 v_n}{5} \right)$$

$$= u_n + 2 v_n + 2(u_n + 4 v_n)$$

$$= 3 u_n + 10 v_n$$

$$= t_n$$

إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $t_{n+1} = t_n$

أي : المتتالية (t_n) ثابتة و كل حدودها تساوي $t_0 = 3 u_0 + 10 v_0 = 3 + 20 = 23$

منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 23$

لكن : $t_n = 3 u_n + 10 v_n$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 u_n + 10 v_n)$

أي : $23 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 u_n + 10 v_n)$

أي : $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \text{ لأن } 23 = 3 \ell + 10 \ell)$

أي : $23 = 13 \ell$

أي : $\ell = 23/13$

التمرين - 49

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} بـ $u_0 = 3$; $v_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1 - أحسب v_2 ; u_2 ; v_1 ; u_1

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $w_n = v_n - u_n$

2 - بين أن المتتالية (w_n) هندسية و عين نهايتها .

3 - أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ثم استنتج انهما متجاورتان .

(t_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n = \frac{1}{3} (u_n + 2 v_n)$

4 - برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة ثم استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحل - 49

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}$$

$$v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{14 + 15}{4}}{2} = \frac{29}{8}$$

$$v_2 = \frac{u_2 + v_2}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29 + 30}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

2- من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n - u_n - v_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + v_n}{2} - u_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_n - u_n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $1/4$ و حدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$

$$منه : w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن $0 \leq 1/4 \leq 1$ اتجاه التغير:

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{2} w_n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

إذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماماً .

لدينا أيضاً من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2} \\ &= \frac{u_{n+1} - v_n}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} \\ &= \frac{u_n + v_n - 2v_n}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_n - v_n}{4} \\ &= -\frac{1}{4}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ن: $v_{n+1} - v_n < 0$ أي المتتالية (v_n) متناقصة تماماً

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لدينا أيضاً :}$$

$$\left. \begin{aligned} & (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماماً} \\ & (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماماً} \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ نتيجة :}$$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

— لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \times \left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) \\ &= \frac{1}{3}(u_n + v_n + v_n) \\ &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ &= t_n \end{aligned}$$

$$t_0 = \frac{1}{3}(u_0 + 2v_0) = \frac{1}{3}(3 + 8) = \frac{11}{3} \quad \text{إذن : المتتالية } (t_n) \text{ ثابتة و كل حدودها تساوي}$$

نتيجة : لدينا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذن هما متقاربتان ولهما نفس النهاية .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \quad \text{نضع}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = \frac{11}{3} \quad \text{من جهة أخرى } (t_n) \text{ متتالية ثابتة إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \quad \text{ن:}$$

$$\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(\ell + 2\ell) \quad \text{ي}$$

$$\frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 3\ell \quad \text{ي}$$

$$\ell = 11/3 \quad \text{و هي نهاية كل من المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n)$$

تمرين 50

$u_0 = -1$ و $v_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

— برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

- 2- برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .
 من أجل كل عدد طبيعي n نضع $x_n = u_n + a v_n$ و $y_n = u_n + b v_n$ حيث a و b عددان حقيقيان متمايزان .
 3- أوجد a و b حتى تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتان ثم عبر عن x_n و y_n بدلالة n
 4- أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n) .

الحل - 50

1- الاستدلال بالتراجع :

من أجل $n=0$: $u_0 < v_0$ لأن $-1 < 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{من أجل } n=1 :$$

$$v_1 = \frac{u_0 + 4v_0}{5} = \frac{-1 + 8}{5} = \frac{7}{5}$$

لدينا $1/2 < 7/5$ إذن : $u_1 < v_1$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$ نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل $n > 1$ هل $u_{n+1} < v_{n+1}$ ؟

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10}$$

$$= \frac{3u_n - 3v_n}{10}$$

$$= \frac{3}{10}(u_n - v_n)$$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $u_n - v_n < 0$

$$\text{منه : } \frac{3}{10}(u_n - v_n) < 0 \quad \text{أي } u_{n+1} - v_{n+1} < 0 \quad \text{أي } u_{n+1} < v_{n+1}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$ 2- هل (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟إتجاه التغير : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

$$\text{لكن } u_n - v_n < 0 \quad \text{إذن : } -\frac{1}{2}(u_n - v_n) > 0 \quad \text{منه : } u_{n+1} - u_n > 0$$

أي : المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$$

$$= \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(u_n - v_n)$$

$$\text{لكن } u_n - v_n < 0 \quad \text{إذن : } \frac{1}{5}(u_n - v_n) < 0 \quad \text{منه : } v_{n+1} - v_n < 0$$

أي : المتتالية (v_n) متناقصة تماما .نهاية الفرق $u_n - v_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \quad \text{لما } n \text{ يؤول إلى ما لا نهاية فإن}$$

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n) \quad \text{لكن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \frac{3}{10} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \frac{3}{10} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \quad \text{أي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \quad \text{منه :}$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (v_n) \text{ متتالية متناقصة تماما} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{array} \right\} \text{ خلاصة :}$$

إذن : المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

إذن : هما متجاورتان نحو نفس النهاية ℓ حيث $\ell \in \mathbb{R}$

3 - من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $x_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{u_n + v_n}{2} + a \left(\frac{u_n + 4 v_n}{5} \right) \\ &= \frac{5 u_n + 5 v_n + 2 a u_n + 8 a v_n}{10} \\ &= \frac{(2 a + 5) u_n + (8 a + 5) v_n}{10} \end{aligned}$$

$$\text{حيث } 2 a + 5 \neq 0 \quad = \frac{2 a + 5}{10} \times \left(u_n + \frac{8 a + 5}{2 a + 5} v_n \right)$$

إذن : تكون (x_n) متتالية هندسية إذا فقط إذا تحقق أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n + \frac{8 a + 5}{2 a + 5} v_n = u_n + a v_n \quad : n \in \mathbb{N} \quad \text{أي من أجل كل } x_{n+1} = \frac{2 a + 5}{10} x_n$$

$$\text{إذن : يكفي و يلزم أن يكون : } \frac{8 a + 5}{2 a + 5} = a \quad \text{مع } 2 a + 5 \neq 0$$

$$2 a^2 + 5 a = 8 a + 5 \quad \text{أي :}$$

$$2 a^2 - 3 a - 5 = 0 \quad \text{أي :} \quad \text{و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول } a$$

$$\Delta = 9 + 40 = 49$$

$$a_1 = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_2 = \frac{3 - 7}{4} = -1$$

لاحظ أن من أجل $a = -1$ فإن $2 a + 5 = 3 \neq 0$

إذن : يكفي أن نأخذ $a = -1$

$$\text{في هذه الحالة : } x_{n+1} = \frac{3}{10} x_n$$

$$\text{أي } (x_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } 3/10 \text{ و حدها الأول } -3 \quad u_0 - v_0 \quad x_0 \quad \text{إذن : } x_n = -3 \left(\frac{3}{10} \right)^n$$

$$\text{من أجل } a = 5/2 \quad 2 a + 5 = 10 \neq 0$$

$$\text{إذن : من أجل } a = 5/2 \quad \text{فإن } x_{n+1} = 1 \times x_n$$

أي المتتالية (x_n) هندسية أساسها 1 (ثابتة)

نتيجة : تكون المتتالية (y_n) المعرفة بـ $y_{n+1} = u_n + b v_n$ هندسية حيث $b \neq -1$ إذا فقط إذا كان $b = 5/2$

$$\text{و في هذه الحالة المتتالية } (y_n) \text{ ثابتة و كل حدودها تساوي } y_0 = u_0 + \frac{5}{2} v_0 = -1 + 5 = 4$$

منه : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $y_n = 4$

$$4 - \text{ لنكن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

$$y_n = u_n + \frac{5}{2} v_n \quad : n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{5}{2} v_n \right) \quad \text{إذن :}$$

$$4 = \ell + \frac{5}{2} \ell \quad \text{إذن :}$$

$$4 = \frac{7}{2} \ell \quad \text{أي}$$

$$\ell = 8/7 \quad \text{منه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 8/7 \quad \text{إذن :}$$

التمرين 51

لتكن (E) مجموعة المتتاليات غير المعدومة (u_n) المعرفة على \mathbb{N} والتي تحقق الخاصية

$$u_{n+2} = \frac{3}{35} u_{n+1} + \frac{2}{35} u_n$$

1 - هل توجد في المجموعة (E) متتالية ثابتة ؟ متتالية حسابية ؟ متتالية هندسية ؟

2 - تحقق أن : من أجل كل عددين حقيقيين α و β تكون المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha \left(\frac{2}{7} \right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5} \right)^n$ عنصر من المجموعة (E)

3 - عين المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n = \alpha \left(\frac{2}{7} \right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5} \right)^n$ علما أن $u_0 = 3$ و $u_1 = -4/35$ ثم أحسب نهاية هذه المتتالية .

الحل 51

1 - لتكن (u_n) عنصر من المجموعة (E)

إذا كانت (u_n) ثابتة فإن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n$

$$u_n = \frac{3}{35} u_n + \frac{2}{35} u_n \quad \text{إذن الخاصية تصبح :}$$

$$u_n = \frac{5}{35} u_n \quad \text{أي :}$$

$$u_n = 0 \quad \text{منه :}$$

أي : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية ثابتة من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) حسابية نسمي α أساسها إذن

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_n + 2\alpha \\ u_{n+1} = u_n + \alpha \end{cases}$$

$$u_n + 2\alpha = \frac{3}{35} (u_n + \alpha) + \frac{2}{35} u_n \quad \text{إذن الخاصية تصبح :}$$

$$u_n + 2\alpha = \left(\frac{3}{35} + \frac{2}{35} \right) u_n + \frac{3}{35} \alpha \quad \text{أي :}$$

$$u_n - \frac{1}{7} u_n = \frac{3}{35} \alpha - 2\alpha \quad \text{أي :}$$

$$\frac{6}{7} u_n = \frac{-67}{35} \alpha \quad \text{أي :}$$

$$u_n = \frac{-67}{35} \times \frac{7}{6} \alpha \quad \text{أي :}$$

$$u_n = \frac{-67}{30} \alpha \quad \text{أي :}$$

أي : المتتالية (u_n) ثابتة و عليه $\alpha = 0$ (لأن (u_n) حسابية)

إذن : المتتالية (u_n) معدومة .

نتيجة : لا توجد أي متتالية حسابية من المجموعة (E) .

إذا كانت (u_n) هندسية نسمي α أساسها إذن

$$\begin{cases} u_{n+2} = \alpha^2 u_n \\ u_{n+1} = \alpha u_n \end{cases}$$

إذن الخاصية تصبح : $\alpha^2 u_n = \frac{3}{35} \alpha u_n + \frac{2}{35} u_n$ (1)

ما من المتتالية (u_n) ليست معدومة فإن $u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

إذن : العلاقة (1) تصبح بعد القسمة على u_n :

$$\alpha^2 = \frac{3}{35} \alpha + \frac{2}{35}$$

أي : $35 \alpha^2 - 3 \alpha - 2 = 0$

و هي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول α .

$$\Delta = 9 + 280 = 289$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{3 + 17}{70} = \frac{-14}{70} = \frac{-1}{5} \\ \alpha_2 = \frac{3 - 17}{70} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \end{cases}$$

نتيجة : كل المتتاليات الهندسية ذات الأساس (-1/5) أو (2/7) و ذات الحد الأول غير معدوم هي متتاليات من المجموعة (E) .

$$u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n \quad \text{---}$$

إذن :

$$\frac{3}{35} u_{n+1} + \frac{2}{35} u_n = \frac{3}{35} \left[\alpha \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1} \right] + \frac{2}{35} \left[\alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n \right]$$

$$= \frac{3\alpha}{35} \times \frac{2}{7} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{3\beta}{35} \times \left(\frac{-1}{5}\right) \left(\frac{-1}{5}\right)^n + \frac{2\alpha}{35} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{2\beta}{35} \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha}{35 \times 7} + \frac{2\alpha}{35} \right) \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta}{35 \times 5} + \frac{2\beta}{35} \right) \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{6\alpha + 14\alpha}{35 \times 7} \right) \left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{-3\beta + 10\beta}{35 \times 5} \right) \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \left(\frac{20\alpha}{5 \times 7 \times 7} \right) \left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{7\beta}{7 \times 5 \times 5} \right) \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \frac{4\alpha}{7 \times 7} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{\beta}{5 \times 5} \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{5}\right)^n$$

$$= \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^{n+2} + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^{n+2}$$

u_{n+2}

نتيجة : $u_{n+2} = \frac{3}{35} u_{n+1} + \frac{2}{35} u_n$ إذن : المتتالية (u_n) عنصر من المجموعة (E)

$$u_n = \alpha \left(\frac{2}{7}\right)^n + \beta \left(\frac{-1}{5}\right)^n \quad \text{---}$$

$u_0 = 3$ إذن : (1) $3 = \alpha + \beta$

$u_1 = \frac{-4}{35}$ إذن : $\frac{-4}{35} = \frac{2}{7} \alpha - \frac{1}{5} \beta$ أي (2) $-4 = 10\alpha - 7\beta$

لنحل جملة المعادلتين

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} 10\alpha + 10\beta - 30 = 0 \\ 10\alpha - 7\beta + 4 = 0 \end{cases}$$

منه :

$$\begin{cases} 17\beta - 34 = 0 \\ 10\alpha = 7\beta - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{34}{17} - 2 \\ \alpha = \frac{7\beta - 4}{10} \end{cases} \quad \text{ج :}$$

أخيرا : $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ إذن $u_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n$

منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n = 0$

التمرين 52

1 - أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{و} \quad f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$$

2 - برهن أن من أجل كل عدد حقيقي موجب x فإن (1) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* بـ $u_1 = 3/2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

3 - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$

4 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 - نضع $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ و $t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن $S_n - \frac{1}{2}t_n \leq \ln u_n \leq S_n$

أحسب S_n و t_n بدلالة n ثم استنتج نهاية كل من S_n و t_n

الحل - 52

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \quad - 1$$

f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

لاحظ أن : على المجال $[0; +\infty[$ فإن $1+x > 0$ إذن : $\frac{-x^2}{1+x} \leq 0$

منه : الدالة f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات :



$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

لاحظ أن على المجال $[0; +\infty[$ فإن $1+x > 0$ إذن : $\frac{-x}{1+x} \leq 0$

منه الدالة g متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

جدول التغيرات :



2 - حسب جدول تغيرات الدالة f فإن من أجل كل x من المجال $[0, +\infty[$ فإن $f(x) < 0$

$$x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) < 0 \quad \text{في من أجل كل } x \text{ موجب فإن}$$

$$\text{منه : من أجل كل } x \text{ موجب فإن } x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) \quad (2) \dots\dots\dots$$

و حسب جدول تغيرات الدالة g فإن من أجل كل x من المجال $[0, +\infty[$ فإن $g(x) \leq 0$

$$\ln(1+x) - x \leq 0 \quad \text{أي : من أجل كل } x \text{ موجب فإن}$$

$$\text{منه : من أجل كل } x \text{ موجب فإن } \ln(1+x) \leq x \quad (3) \dots\dots\dots$$

من العلاقات (2) و (3) نستنتج أن :

$$\text{من أجل كل } x \text{ موجب فإن } x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x \quad (1) \dots\dots\dots$$

3 - لتكن الخاصية : من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $u_n > 0$

من أجل $n=1$: $u_1 = 3/2$ و $3/2 > 0$ إذن الخاصية محققة .

نفرض أن : $u_n > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 0$ ؟

لدينا : $u_n > 0$ حسب فرضية التراجع

$$\text{أما : } 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \quad \text{لأن } u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$$

أي : $u_{n+1} > 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

سجّة : من أجل كل n من \mathbb{N}^* : $u_n > 0$

- لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كماليلي :

$$\text{من أجل } n=1 : u_1 = 3/2 \quad \text{إذن : } \ln u_1 = \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{لكن } \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{إذن : } \ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n=1$

$$\text{نفرض أن } \ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{من أجل } n > 1$$

$$\text{هل } \ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{هل}$$

$$\ln(u_{n+1}) = \ln\left[u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] \quad \text{لدينا :}$$

$$= \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n+1$

سجّة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots\dots\dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

5 - حسب السؤال (2) فإن من أجل كل x من $[0, +\infty[$ فإن : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$

لنكتب هذه العلاقة من أجل $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ كما يلي :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 &< \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^2} \right)^2 &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \leq \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^3} \right)^2 &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^3} \right) < \frac{1}{2^3} \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

بجمع هذه المتباينات طرف لـ طرف نحصل على :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) < \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

أي $S_n - \frac{1}{2} t_n \leq \ln u_n \leq S_n$ و هو المطلوب

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$t_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{4} \right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$$

نتيجة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n = 1$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$

لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] = \frac{1}{3}$

التمرين 53

(u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ $u_0 = 1,5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2u_n - 1$

المطلوب : ميز فيمايلي بين الجمل الصحيحة و الخاطئة مع التبرير .

1 - المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 1 الذي هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادليهما $y = x$ و $y = 2x - 1$

2 - المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية .

3 - المتتالية (v_n) المعرفة في السؤال (2) محدودة من الأعلى .

الحل - 53

1 - لنثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة (بالتراجع)

لدينا : $u_1 = 2u_0 - 1 = 2(1,5) - 1 = 2$

إذن : $u_1 > u_0$

نفرض أن $u_n - u_{n-1} > 0$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} - u_n > 0$ ؟

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 1 - u_n \\ = u_n - 1$$

لكن $u_n > u_0 > 1$ حسب فرضية التراجع

إذن : $u_n - 1 > 0$

منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة من أجل $n + 1$

نتيجة : المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N}

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > u_0 > 1$

و عليه : فالمتتالية (u_n) لا يمكن أن تتقارب نحو العدد 1 .

2 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 \\ = 2u_n - 1 - 1 \\ = 2u_n - 2 \\ = 2(u_n - 1) \\ = 2v_n$$

إذن : فعلا (v_n) متتالية هندسية أساسها 2

3 - المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 1,5 - 1 = 0,5$

إذن : $v_n = 0,5 \times 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5 \times 2^n = +\infty$$

إذن : المتتالية (v_n) متباعدة نحو $+\infty$

إذن : فهي متتالية غير محدودة من الأعلى .

الموافقات في Z

Kimou.

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان .
 نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا و فقط إذا كان لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n
 و نكتب $a \equiv b[n]$ و نقرا a يوافق b بترديد n
 أمثلة : $13 \equiv 3[5]$ لأن باقي قسمة كل من 13 و 3 على 5 هو 3
 $27 \equiv 92[5]$ لأن باقي قسمة كل من 27 و 92 على 5 هو 2
 $-20 \equiv 1[7]$ لأن باقي قسمة كل من -20 و 1 على 7 هو 1
 نتيجة : من أجل كل عدد صحيح x فإن $x \equiv 0[1]$
 مبرهنة : n عدد طبيعي غير معدوم . a و b عددان صحيحان
 يكون $a \equiv b[n]$ إذا و فقط إذا كان $a - b$ مضاعف n أي يوجد عدد صحيح k حيث $a = nk + b$
 أمثلة :

$$100 - 7 = 93 \text{ مضاعف } 3 \text{ إذن : } 100 \equiv 7[3]$$

$$-20 - 1 = -21 \text{ مضاعف } 3 \text{ إذن : } -20 \equiv 1[3]$$

نشاط : ضع صحيح أو خطأ مع التعليل :

$$1 - 26 \equiv 11[5] \quad - 3 \quad 478 \equiv 32[5]$$

$$2 - 32 \equiv 18[10] \quad - 4 \quad 58 \equiv -5[7]$$

الحل :

$$1 - 26 \equiv 11[5] \text{ صحيح لأن } 26 - 11 = 15 \text{ مضاعف } 5$$

$$2 - 32 \equiv 18[10] \text{ صحيح لأن } 32 - 18 = 14 \text{ مضاعف } 10$$

$$3 - 478 \equiv 32[5] \text{ خطأ لأن } 478 - 32 = 446 \text{ ليس مضاعف } 5$$

$$4 - 58 \equiv -5[7] \text{ صحيح لأن } 58 - (-5) = 63 \text{ مضاعف } 7$$

خاصية أساسية : n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n (القسمة الإقليدية)

$$\text{أمثلة : } 17 \equiv 2[5] \quad ; \quad 30 \equiv 6[8]$$

خواص : n و p عددان طبيعيين غير معدومان .

$$a \equiv b \quad ; \quad c \equiv d \quad \text{أعداد صحيحة .}$$

$$1 - a \equiv a[n] \text{ خاصية الانعكاس}$$

$$2 - \text{إذا كان } a \equiv b[n] \text{ فإن } b \equiv a[n] \text{ خاصية التناظر}$$

$$3 - \text{إذا كان } \left. \begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ b \equiv c[n] \end{array} \right\} \text{ فإن } a \equiv c[n] \text{ خاصية التعدي}$$

$$4 - \text{إذا كان } \left. \begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array} \right\} \text{ فإن } a + c \equiv b + d[n] \text{ خاصية الجمع}$$

$$5 - \text{إذا كان } \left. \begin{array}{l} a \equiv b[n] \\ c \equiv d[n] \end{array} \right\} \text{ فإن } ac \equiv bd[n] \text{ خاصية الجداء}$$

$$6 - \text{إذا كان } a \equiv b[n] \text{ فإن } ac \equiv bc[n] \text{ خاصية الضرب في عدد صحيح}$$

$$7 - \text{إذا كان } a \equiv b[n] \text{ فإن } a^p \equiv b^p[n] \text{ خاصية الأس}$$

ملاحظة : من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين n و p و من أجل كل عددين صحيحين a و b فإن :

$$a \equiv b[n] \text{ يكافئ } ap \equiv bp[np]$$

نشاط : عين باقي قسمة (-5817) على 251

الحل : بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 5817 & 251 \\ 502 & 23 \\ \hline 797 & \\ 753 & \\ \hline 44 & \end{array}$$

$$5817 - 251(23) + 44 \quad \text{إذن :}$$

$$- 5817 = 251(-23) - 44 \quad \text{منه :}$$

$$- 5817 = 251(-23) - 44 + 251 - 251 \quad \text{أي :}$$

$$- 5817 = 251(-24) + 207 \quad \text{أي :}$$

$$- 5817 = 207[251] \quad \text{منه :}$$

ملاحظة : يمكن إيجاد هذه النتيجة باستعمال الحواصل كمايلي :

$$5817 \equiv 44[251] \quad \text{إذن :} \quad 44 \text{ هو } 251 \text{ على } 5817$$

$$\text{منه : } - 5817 \equiv - 44[251] \quad \text{(خاصية الضرب في عدد صحيح)}$$

$$\left. \begin{array}{l} - 44 \equiv - 44[251] \quad \text{إذن :} \\ - 44 \equiv 207[251] \quad \text{أي} \end{array} \right\} \text{ من جهة أخرى :}$$

$$\text{نتيجة : حسب علاقة التعدي } - 5817 \equiv - 44[251] \text{ و } - 44 \equiv 207[251]$$

$$\text{إذن : } - 5817 \equiv 207[251]$$

نشاط : عين الأعداد الصحيحة x حيث $x + 4 \equiv 2[7]$

$$\left. \begin{array}{l} x + 4 \equiv 2[7] \quad \text{إذن :} \\ - 4 \equiv - 4[7] \quad \text{أي :} \end{array} \right\} \text{ الحل :}$$

$$\text{منه : } x + 0 \equiv - 2 + 7[7] \text{ لأن } 0 \equiv 7[7]$$

$$\text{أي : } x \equiv 5[7]$$

$$\text{نتيجة : } x = 7k + 5 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

نشاط : عين قيم العدد الصحيح x حيث $5x \equiv 3[7]$ الحل : لتعيين قيم x ندرس بواقي قسمة $5x$ على 7 من أجل كل البواقي الممكنة لـ x على 7

وهي 0 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ 4 ؛ 5 ؛ 6

$$\text{إذن : لما } x \equiv 0[7] \text{ فإن } 5x \equiv 0[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 1[7] \text{ فإن } 5x \equiv 5[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 2[7] \text{ فإن } 5x \equiv 10[7] \text{ أي } 5x \equiv 3[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 3[7] \text{ فإن } 5x \equiv 15[7] \text{ أي } 5x \equiv 1[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 4[7] \text{ فإن } 5x \equiv 20[7] \text{ أي } 5x \equiv 6[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 5[7] \text{ فإن } 5x \equiv 25[7] \text{ أي } 5x \equiv 4[7]$$

$$\text{لما } x \equiv 6[7] \text{ فإن } 5x \equiv 30[7] \text{ أي } 5x \equiv 2[7]$$

نتيجة : يكون $5x \equiv 3[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 2[7]$

$$\text{أي } x = 7k + 2 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة : يمكن تلخيص هذه الإجابة في الجدول التالي :

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5x \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

$$\text{إذن : } 5x \equiv 3[7] \text{ من أجل } x \equiv 2[7] \text{ أي } x = 7k + 2$$

نشاط : ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 5ثم استنتج باقي قسمة العدد 3^{4039} على 5الحل : لنبحث عن بواقي قسمة 3^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـ n كمايلي :

$$3^8 \equiv 1[5] \leftarrow n = 8$$

$$3^9 \equiv 3[5] \leftarrow n = 9$$

$$3^{10} \equiv 4[5] \leftarrow n = 10$$

$$3^{11} \equiv 2[5] \leftarrow n = 11$$

$$3^4 \equiv 1[5] \leftarrow n = 4$$

$$3^5 \equiv 3[5] \leftarrow n = 5$$

$$3^6 \equiv 4[5] \leftarrow n = 6$$

$$3^7 \equiv 2[5] \leftarrow n = 7$$

$$3^0 \equiv 1[5] \leftarrow n = 0$$

$$3^1 \equiv 3[5] \leftarrow n = 1$$

$$3^2 \equiv 4[5] \leftarrow n = 2$$

$$3^3 \equiv 2[5] \leftarrow n = 3$$

نتيجة :

$$\text{لما } n = 4k \text{ فإن } 3^n \equiv 1[5]$$

$$\text{لما } n = 4k + 1 \text{ فإن } 3^n \equiv 3[5]$$

$$3^n \equiv 4[5] \text{ فإن } n = 4k + 2 \text{ لما}$$

$$3^n \equiv 2[5] \text{ فإن } n = 4k + 3 \text{ لما}$$

$$3^{4039} \equiv 3^{4(1009)+3} \equiv 3^{4k+3} \equiv 2[5] \text{ فإن } 4039 = 4(1009) + 3 \text{ بما أن}$$

إذن : باقي قسمة 3^{4039} على 5 هو 2
التعداد

مبرهنة : x عدد طبيعي أكبر تماماً من 1

كل عدد طبيعي a حيث $a \geq x$ يكتب بطريقة وحيدة من الشكل .

$$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + r_{n-2} x^{n-2} + \dots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث q و r_i أعداد طبيعية و $0 \leq r_i < x$ و $0 < q < x$

مثال : $x = 2$ ؛ $a = 29$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$

$$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

$$\text{اذن : } r_3 = 1 ; r_2 = 1 ; r_1 = 0 ; r_0 = 1 ; n = 4 ; q = 1$$

نتيجة : x عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 و a عدد طبيعي .

1 - إذا كان $a < x$ نسمي a رقماً في النظام ذو الأساس x و نرمز له برمز وحيد

2 - إذا كان $a \geq x$ نمثل العدد a في النظام ذو الأساس x بـ $r_0 r_1 \dots r_{n-1} r_n$ حيث

$$a = q x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \dots + r_1 x + r_0 \text{ و } 0 \leq r_i < x \text{ و } 0 < q < x$$

حالة خاصة : إذا كان $x = 10$ نكتب $r_0 r_1 \dots r_{n-1} r_n$ و يسمى النظام العشري

$$\text{مثال : في المثال السابق لدينا : } 29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$$

إذن : العدد 29 يكتب 11101 في النظام ذو الأساس 2

ملاحظة : أرقام النظام ذو الأساس x هي $\{0; 1; 2; \dots; (x-1)\}$

مثلاً : النظام ذو الأساس 2 له الأرقام $\{0; 1\}$

النظام ذو الأساس 5 له الأرقام $\{0; 1; 2; 3; 4\}$

النظام العشري له الأرقام $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

التعداد و قابلية القسمة في N

ليكن $A = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ عدد طبيعي يكتب في النظام العشري

1 - يكون A قابلاً للقسمة على 10 إذا و فقط إذا كان $a_0 = 0$

2 - يكون A قابلاً للقسمة على 2 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

3 - يكون A قابلاً للقسمة على 5 إذا و فقط إذا كان $a_0 \in \{0; 5\}$

4 - يكون A قابلاً للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \equiv 0[3]$

5 - يكون A قابلاً للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \equiv 0[9]$

6 - يكون A قابلاً للقسمة على 4 إذا و فقط إذا كان $(10 a_1 + a_0) \equiv 0[4]$

7 - يكون A قابلاً للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $((-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots - a_1 + a_0) \equiv 0[11]$

أمثلة :

العدد 567 لا يقبل القسمة على 10 لأن $7 \neq 0$

العدد 1728 يقبل القسمة على 4 لأن 28 مضاعف 4

العدد 115 يقبل القسمة على 5

العدد 17382 يقبل القسمة على 3 لأن $(1 + 7 + 3 + 8 + 2)$ مضاعف 3

العدد 7345591 يقبل القسمة على 11 لأن $(7 - 3 + 4 - 5 + 5 - 9 + 1)$ مضاعف 11

العدد 275841 يقبل القسمة على 9 لأن $(2 + 7 + 5 + 8 + 4 + 1)$ مضاعف 9

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين 1

برر صحة العبارات التالية :

$$\begin{array}{llll} 45 \equiv 3[7] & -1 & -13 \equiv 2[3] & -3 \\ 29 \equiv -1[6] & -2 & 152 \equiv 2[3] & -4 \\ 137 \equiv -3[5] & -5 & -17 \equiv -7[10] & -6 \end{array}$$

الحل 1

$$\begin{array}{ll} 1 & - \quad 45 - 3 = 42 \quad \text{و} \quad 42 \text{ مضاعف } 7 \text{ إذن : } 45 \equiv 3[7] \\ 2 & - \quad 29 - (-1) = 30 \quad \text{و} \quad 30 \text{ مضاعف } 6 \text{ إذن : } 29 \equiv -1[6] \\ 3 & - \quad -13 - 2 = -15 \quad \text{و} \quad -15 \text{ مضاعف } 3 \text{ إذن : } -13 \equiv 2[3] \\ 4 & - \quad 152 - 2 = 150 \quad \text{و} \quad 150 \text{ مضاعف } 3 \text{ إذن : } 152 \equiv 2[3] \\ 5 & - \quad 137 - (-3) = 140 \quad \text{و} \quad 140 \text{ مضاعف } 5 \text{ إذن : } 137 \equiv -3[5] \\ 6 & - \quad -17 - (-7) = -10 \quad \text{و} \quad -10 \text{ مضاعف } 10 \text{ إذن : } -17 \equiv -7[10] \end{array}$$

التمرين 2

عين خمسة أعداد صحيحة x تحقق $37 \equiv x[4]$

ما هو العدد الطبيعي x الذي يكون أصغر ما يمكن حيث $37 \equiv x[4]$

الحل 2

$$\begin{array}{ll} 37 - 5 = 32 & \text{و} \quad 32 \text{ مضاعف } 4 \text{ إذن : } 37 \equiv 5[4] \\ 37 - (-3) = 40 & \text{و} \quad 40 \text{ مضاعف } 4 \text{ إذن : } 37 \equiv -3[4] \\ 37 - 13 = 24 & \text{و} \quad 24 \text{ مضاعف } 4 \text{ إذن : } 37 \equiv 13[4] \\ 37 - 9 = 28 & \text{و} \quad 28 \text{ مضاعف } 4 \text{ إذن : } 37 \equiv 9[4] \\ 37 - 17 = 20 & \text{و} \quad 20 \text{ مضاعف } 4 \text{ إذن : } 37 \equiv 17[4] \end{array}$$

أصغر عدد طبيعي x يحقق $37 \equiv x[4]$ هو باقي القسمة الإقليدية لـ 37 على 4 كمايلي :

$$\begin{array}{r} 37 \mid 4 \\ 36 \mid 9 \\ \hline 1 \end{array} \quad \text{إذن : } x = 1$$

التمرين 3

عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 30 حيث $n \equiv 4[7]$

الحل 3

أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \equiv 4[7]$ هو $n = 4$ لأن $4 - 4 = 0$ و 0 مضاعف 7 لكن لدينا $7 \equiv 0[7]$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \text{نتيجة : منه : } 11 \equiv 4[7] \text{ (باستعمال خاصية الجمع)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 11 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \text{بنفس الطريقة لدينا : } 18 \equiv 4[7] \text{ (دائما خاصية الجمع)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 18 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \text{إذن : } 25 \equiv 4[7]$$

$$\left. \begin{array}{l} 25 \equiv 4[7] \\ 7 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \text{إذن : } 32 \equiv 4[7] \text{ نتوقف لأن } 32 > 30$$

خلاصة : الأعداد المطلوبة n هي $\{4; 11; 18; 25\}$

التمرين 4 -

n عدد صحيح يحقق $n \equiv 140[12]$

عين باقي قسمة العدد n على 12

الحل - 4

$$\begin{array}{r} 140 \overline{) 12} \\ 12 \overline{) 12} \\ \hline 20 \\ 12 \overline{) 20} \\ \hline 8 \end{array}$$

لنبحث عن باقي قسمة 140 على 12 كمايلي :

$$\text{إذن : } 140 = 8[12]$$

$$\left. \begin{array}{l} n \equiv 140[12] \\ 140 \equiv 8[12] \end{array} \right\} \text{نتيجة : } n \equiv 8[12] \text{ منه : حسب خاصية التعدي}$$

بما ان $0 \leq 8 < 12$ فإن 8 هو باقي قسمة n على 12

التمرين 5 -

x عدد صحيح باقي قسمته على 7 هو 2

عين باقي القسمة على 7 لكل من الأعداد الصحيحة التالية :

$$x^3 ; -15x ; 9x ; x-5 ; x+5$$

الحل - 5

باقي قسمة x على 7 هو 2 إذن : $x \equiv 2[7]$

منه النتائج التالية :

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ 5 \equiv 5[7] \end{array} \right\} - 1 \quad \text{إذن : } x+5 \equiv 2+5[7] \quad \text{أي } x+5 \equiv 0[7] \text{ لأن } 7 \equiv 0[7]$$

منه : باقي قسمة $x+5$ على 7 هو 0

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ -5 \equiv -5[7] \end{array} \right\} - 2 \quad \text{إذن : } x-5 \equiv 2-5[7]$$

من جهة اخرى لدينا $0 \equiv 7[7]$

$$\left. \begin{array}{l} x-5 \equiv -3[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{array} \right\} \text{ إذن : } x-5 \equiv 7-3[7] \text{ أي } x-5 \equiv 4[7]$$

إذن : باقي قسمة $x-5$ على 7 هو 4

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ 9 \equiv 2[7] \end{array} \right\} - 3 \quad \text{إذن : } 9x \equiv 2 \times 2[7] \quad \text{أي باقي قسمة } 9x \text{ على 7 هو 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 2[7] \\ -15 \equiv -1[7] \end{array} \right\} - 4 \quad \text{إذن : } -15x \equiv -2[7]$$

$$\left. \begin{array}{l} -15x \equiv -2[7] \\ 0 \equiv 7[7] \end{array} \right\} \text{ منه : } -15x \equiv 5[7]$$

إذن : $-15x \equiv 5[7]$

أي باقي قسمة $-15x$ على 7 هو 5

$$- 5 \quad x \equiv 2[7] \quad \text{إذن : } x^3 \equiv 2^3[7] \text{ (خاصية الأس)}$$

$$\text{أي : } x^3 \equiv 8[7]$$

منه : $x^3 \equiv 1[7]$ لأن $8 \equiv 1[7]$

أي باقي قسمة x^3 على 7 هو 1

التمرين 6 -

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2

في كل حالة من الحالات التالية عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الموافقة :

$$46 \equiv 0[n] \quad - 1 \quad 10 \equiv 1[n] \quad - 2 \quad 27 \equiv 5[n] \quad - 3$$

الحل - 6

$$- 1 \quad 46 \equiv 0[n] \quad \text{إذن : } 46 \text{ مضاعف } n$$

منه : n قاسم لـ 46 ($n \geq 2$)

$$\text{إذن : } n \in \{2 ; 23 ; 46\}$$

$$- 2 \quad 10 \equiv 1[n] \quad \text{إذن : } 10 - 1 \text{ مضاعف } n$$

أي 9 مضاعف n
 أي n قاسم لـ 9 ($n \geq 2$)
 منه : $n \in \{3; 9\}$
 $3 - 5[n] - 27$ إذن : 5 - 27 مضاعف n
 أي 22 مضاعف n
 منه n قاسم لـ 22 ($n > 2$)
 إذن : $n \in \{2; 11; 22\}$

التمرين - 7

n و m عددان طبيعيين غير معدومان .
 a و b عددان صحيحان .
 أثبت أن : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a m \equiv b m[n m]$

الحل - 7

لأثبت صحة هذا التكافؤ يكفي أن نثبت الشرطين التاليين :
 (1) إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a m \equiv b m[n m]$
 (2) إذا كان $a m \equiv b m[n m]$ فإن $a \equiv b[n]$

إثبات الشرط (1)

ليكن $a \equiv b[n]$ إذن : $(a - b)$ مضاعف n
 منه : $m(a - b)$ مضاعف $n m$
 أي $a m - b m$ مضاعف $n m$
 أي $a m \equiv b m[n m]$
 أي الشرط (1) محقق .

إثبات الشرط (2)

ليكن $a m \equiv b m[n m]$ إذن : $(a m - b m)$ مضاعف $n m$

أي : $m(a - b)$ مضاعف $n m$
 أي $(a - b)$ مضاعف n لأن $m \neq 0$
 أي $a \equiv b[n]$
 إذن : الشرط (2) محقق .

خلاصة : $a \equiv b[n]$ يكافئ $a m \equiv b m[n m]$

التمرين - 8

a, b, c, A, B, C أعداد حقيقية .
 برهن أن إذا كانت الأعداد $(A - a) : (B - b) : (C - c)$ تقبل القسمة على عدد طبيعي غير معدوم n
 فإن العدد $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

الحل - 8

(1) $(A - a)$ مضاعف n إذن : $A \equiv a[n]$
 (2) $(B - b)$ مضاعف n إذن : $B \equiv b[n]$
 (3) $(C - c)$ مضاعف n إذن : $C \equiv c[n]$
 باستعمال خاصية الجداء بين (1) و (2) نحصل على $AB \equiv a b[n]$ (+)
 باستعمال خاصية الجداء بين (3) و (4) نحصل على $ABC \equiv abc[n]$
 أي $(ABC - abc)$ مضاعف n
 أي $(ABC - abc)$ يقبل القسمة على n

التمرين - 9

n و m عددان طبيعيين غير معدومين . حيث $n = 0[m]$
 a و b عددان صحيحان .
 أثبت أن : إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a \equiv b[m]$

الحل - 9

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ مضاعف } m \\ a - b \text{ مضاعف } n \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} n \equiv 0[m] \\ a - b \equiv 0[n] \end{array} \right\}$$

أي (b - a) مضاعف m (بالتعدي)
منه : $a \equiv b[m]$

التمرين - 10

1 - a, b, c أعداد صحيحة حيث $a \equiv 30757[10]$ ؛ $b \equiv 15163[10]$ ؛ $c \equiv 12924[10]$ ؛
بسط الموافقات المعطاة .

2 - عين العدد الطبيعي x حيث $0 \leq x \leq 9$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{ll} \text{(أ)} & a + b + c \equiv x[10] \\ \text{(ب)} & a + b - c \equiv x[10] \\ \text{(ج)} & ab + ac + bc \equiv x[10] \\ \text{(د)} & a - b + c \equiv x[10] \\ \text{(هـ)} & abc \equiv x[10] \\ \text{(و)} & a^2 + b^2 + c^2 \equiv x[10] \end{array}$$

الحل - 10

1 - $a \equiv 30757[10]$ إذن : $a \equiv 7[10]$ لأن باقي قسمة 30757 على 10 هو 7
 $b \equiv 15163[10]$ إذن : $b \equiv 3[10]$ لأن باقي قسمة 15163 على 10 هو 3
 $c \equiv 12924[10]$ إذن : $c \equiv 4[10]$ لأن باقي قسمة 12924 على 10 هو 4

2 - $\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(أ)}$ إذن : $a + b + c \equiv 7 + 3 + 4[10]$ أي : $a + b + c \equiv 4[10]$ أي $x = 4$

$\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(ب)}$ إذن : $a + b - c \equiv 7 + 3 - 4[10]$ أي : $a + b - c \equiv 6[10]$ أي $x = 6$

$\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(ج)}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} ab \equiv 7 \times 3[10] \\ ac \equiv 7 \times 4[10] \\ bc \equiv 3 \times 4[10] \end{array} \right\}$

أي : $\left. \begin{array}{l} ab \equiv 1[10] \text{ لأن } 21 \equiv 1[10] \\ ac \equiv 8[10] \text{ لأن } 28 \equiv 8[10] \\ bc \equiv 2[10] \text{ لأن } 12 \equiv 2[10] \end{array} \right\}$

أي $ab + ac + bc \equiv 1 + 8 + 2[10]$
أي $ab + ac + bc \equiv 1[10]$
أي $x = 1$

$\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(د)}$ إذن : $a - b + c \equiv 7 - 3 + 4[10]$ أي : $a - b + c \equiv 8[10]$ أي $x = 8$

$\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(هـ)}$ فن : $abc \equiv 7 \times 3 \times 4[10]$ أي : $abc \equiv 4[10]$ أي $x = 4$

$\left. \begin{array}{l} a \equiv 7[10] \\ b \equiv 3[10] \\ c \equiv 4[10] \end{array} \right\} \text{(و)}$ فن : $\left. \begin{array}{l} a^2 \equiv 7^2[10] \\ b^2 \equiv 3^2[10] \\ c^2 \equiv 4^2[10] \end{array} \right\}$

$$\left. \begin{aligned} a^2 &\equiv 9[10] \\ b^2 &\equiv 9[10] \\ c^2 &\equiv 6[10] \end{aligned} \right\} \text{أي :}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 9 + 9 + 6[10] \quad \text{منه}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 4[10] \quad \text{أي}$$

$$x = 4 \quad \text{ي}$$

التمرين 11

ABCDE مضلع منتظم محيط بالدائرة (C) كما هو موضح على الشكل المقابل .

M نقطة متحركة على الدائرة (C) انطلاقاً من النقطة A

نفرض أن الاتجاه المباشر هو الاتجاه العكسي لعقارب الساعة
أوجد نقطة الوصول في كل من الحالات التالية :

(أ) M تقطع 15123 قوساً متتالية في الاتجاه المباشر .

(ب) M تقطع 15132 قوساً متتالية في الاتجاه غير المباشر .

الحل 11

بملاحظة الشكل نستنتج ما يلي :

(أ) في الاتجاه المباشر

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	A
6	B
7	C
8	D
9	E

نتيجة :

ليكن x عدد الأقواس المقطوعة في الاتجاه المباشر إذن :

إذا كان $x \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $x \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

إذا كان $x \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $x \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $x \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

منه : بعد قطع 15123 قوساً متتالية في الاتجاه المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15123 \equiv 3[5]$

(ب) في الاتجاه غير المباشر :

عدد الأقواس المقطوعة	نقطة الوصول
0	A
1	E
2	D
3	C
4	B
5	A
6	E
7	D
8	C
9	B

نتيجة :

ليكن y عدد الأقواس المقطوعة في الاتجاه غير المباشر :

إذا كان $y \equiv 0[5]$ فإن نقطة الوصول هي A

إذا كان $y \equiv 1[5]$ فإن نقطة الوصول هي E

إذا كان $y \equiv 2[5]$ فإن نقطة الوصول هي D

إذا كان $y \equiv 3[5]$ فإن نقطة الوصول هي C

إذا كان $y \equiv 4[5]$ فإن نقطة الوصول هي B

نتيجة : بعد قطع 15132 قوساً متتالية في الاتجاه غير المباشر فإن نقطة الوصول هي D لأن $15132 \equiv 2[5]$

التمرين 12

عين باقي قسمة العدد 12^{1527} على 5

الحل 12

لدينا : $12 \equiv 2[5]$ إذن : $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5]$

إذن : يكفي تعيين باقي قسمة 2^{1527} على 5 كما يلي :

ندرس أولاً بواقي قسمة 2^n على 5 من أجل قيم مختلفة لـ n من N

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } n = 4k \text{ فإن } 2^n - 1[5] \\ \text{إذا كان } n = 4k + 1 \text{ فإن } 2^n - 2[5] \\ \text{إذا كان } n = 4k + 2 \text{ فإن } 2^n - 4[5] \\ \text{إذا كان } n = 4k + 3 \text{ فإن } 2^n - 3[5] \end{array} \right\} \text{ منه حيث } k \text{ عدد طبيعي .}$$

$$\begin{array}{l} 2^0 = 1[5] \\ 2^1 = 2[5] \\ 2^2 = 4[5] \\ 2^3 = 3[5] \end{array}$$

نتيجة : $1527 = 4(381) + 3$ إذن $1527 = 4k + 3$

منه : $2^{1527} = 3[5]$

إذن : باقي قسمة 2^{1527} على 5 هو 3

التمرين 13

عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد التالية على 5 :

$$\begin{array}{ll} (371)^{238} - 1 & (1429)^{2009} - 3 \\ (579)^{2008} - 2 & (1954)^{1962} - 4 \end{array}$$

الحل 13

$$(371)^{238} \equiv 1[5] - 1 \quad \text{إذن : } (371)^{238} \equiv 1[5]$$

$$(371)^{238} \equiv 1[5] \quad \text{أي :}$$

منه : باقي قسمة $(371)^{238}$ على 5 هو 1

$$579 \equiv 4[5] - 2$$

لكن $4 \equiv -1[5]$ لأن $4 - (-1) = 5$ مضاعف 5

إذن : حسب علاقة التعدي فإن $579 \equiv -1[5]$

$$(579)^{2008} \equiv (-1)^{2008}[5] \quad \text{منه :}$$

$$(579)^{2008} \equiv 1[5] \quad \text{أي :}$$

إذن : باقي قسمة $(579)^{2008}$ على 5 هو 1

$$1429 \equiv 4[5] - 3 \quad \text{إذن : } 1429 \equiv -1[5]$$

$$(1429)^{2009} \equiv (-1)^{2009}[5] \quad \text{منه}$$

$$(1429)^{2009} \equiv -1[5] \quad \text{أي}$$

$$(1429)^{2009} \equiv 4[5] \quad \text{لأن } -1 \equiv 4[5]$$

إذن : باقي قسمة $(1429)^{2009}$ على 5 هو 4

$$1954 \equiv 4[5] - 4 \quad \text{إذن : } 1954 \equiv -1[5]$$

$$(1954)^{1962} \equiv (-1)^{1962}[5] \quad \text{منه :}$$

$$(1954)^{1962} \equiv 1[5] \quad \text{أي}$$

منه باقي قسمة $(1954)^{1962}$ على 5 هو 1

التمرين 14

عين بواقي قسمة الأعداد التالية على 9

$$\begin{array}{lll} (375)^{2009} - 3 & (34572)^{457} - 2 & (1754)^{12} - 1 \end{array}$$

الحل 14

$$1754 \equiv 8[9] \quad \text{إذن :}$$

$$1754 \equiv -1[9] \quad \text{أي}$$

$$(1754)^{12} \equiv (-1)^{12}[9] \quad \text{منه}$$

$$(1754)^{12} \equiv 1[9] \quad \text{أي}$$

منه باقي قسمة $(1754)^{12}$ على 9 هو 1

$$34572 \equiv 3[9] \quad \text{إذن :}$$

1754	9
85	194
44	
8	

$(34572)^{457} \equiv (3)^{457} [9]$ منه		
$(34572)^{457} \equiv 3^2 \times 3^{455} [9]$ أي :	34572	9
$(34572)^{457} \equiv 9 \times 3^{455} [9]$ أي	75	3841
$(34572)^{457} \equiv 0 [9]$ أي	37	
لأن 9×3^{455} مضاعف 9	12	
منه : باقي قسمة $(34572)^{457}$ على 9 هو 0	3	

$375 \equiv 6 [9]$ منه		
$(375)^{2009} \equiv (6)^{2009} [9]$ إذن		
$(375)^{2009} \equiv (2 \times 3)^{2009} [9]$ أي	375	9
$(375)^{2009} \equiv 3^{2009} \times 2^{2009} [9]$ أي	15	41
$(375)^{2009} \equiv 3^2 \times 3^{2007} \times 2^{2009} [9]$ أي	6	
$(375)^{2009} \equiv 9 \times 3^{2007} \times 2^{2009}$ أي		
$(375)^{2009} \equiv 0 [9]$ أي		
منه : باقي قسمة $(375)^{2009}$ على 9 هو 0		

التمرين - 15

برهن أن العدد $1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + 4^{2009}$ يقبل القسمة على 5

الحل - 15

(1) $1^{2009} \equiv 1 [5]$ إذن : $1 \equiv 1 [5]$
 (2) $4^{2009} \equiv -1 [5]$ أي $4^{2009} \equiv (-1)^{2009} [5]$ إذن : $4 \equiv -1 [5]$
 $3^{2009} \equiv (-2)^{2009} [5]$ إذن : $3 \equiv -2 [5]$
 أي $3^{2009} \equiv (-1)^{2009} \times 2^{2009} [5]$
 (3) $3^{2009} \equiv -2^{2009} [5]$ أي :
 (4) $2^{2009} \equiv 2^{2009} [5]$ إذن : $2 \equiv 2 [5]$
 نتيجة : بجمع الموافقات (1) و (2) و (3) و (4) نحصل على :
 $1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 1 - 1 - 2^{2009} + 2^{2009} [5]$
 $1^{2009} + 4^{2009} + 3^{2009} + 2^{2009} \equiv 0 [5]$ أي :
 منه : العدد $1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + 4^{2009}$ يقبل القسمة على 5

التمرين - 16

برهن أن العدد $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007}$ يقبل القسمة على 7

الحل - 16

(1) $1^{2007} \equiv 1 [7]$
 (2) $6^{2007} \equiv -1 [7]$ أي $6^{2007} \equiv (-1)^{2007} [7]$ إذن : $6 \equiv -1 [7]$
 (3) $2^{2007} \equiv 2^{2007} [7]$ إذن : $2 \equiv 2 [7]$
 (4) $5^{2007} \equiv -2^{2007} [7]$ أي $5^{2007} \equiv (-2)^{2007} [7]$ إذن : $5 \equiv -2 [7]$
 (5) $3^{2007} \equiv 3^{2007} [7]$ إذن : $3 \equiv 3 [7]$
 (6) $4^{2007} \equiv -3^{2007} [7]$ أي $4^{2007} \equiv (-3)^{2007} [7]$ إذن : $4 \equiv -3 [7]$
 بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) ، (5) ، (6) طرف لطرف نحصل على :
 $1^{2007} + 6^{2007} + 2^{2007} + 5^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} \equiv 1 - 1 + 2^{2007} - 2^{2007} + 3^{2007} - 3^{2007} [7]$
 $1^{2007} + 6^{2007} + 2^{2007} + 5^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} \equiv 0 [7]$ أي :
 منه : باقي قسمة العدد $1^{2007} + 2^{2007} + 3^{2007} + 4^{2007} + 5^{2007} + 6^{2007}$ على 7 هو 0

التمرين - 17

برهن أن العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008}$ يقبل القسمة على 9

الحل - 17

- (1)..... $1^{2008} \equiv 1[9]$
 (2) $8^{2008} \equiv 1[9]$ منه $8^{2008} = (-1)^{2008}[9]$ إذن $8 \equiv -1[9]$
 (3)..... $2^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$
 (4) $7^{2008} \equiv 2^{2008}[9]$ منه $7^{2008} = (-2)^{2008}[9]$ إذن $7 \equiv -2[9]$
 (5)..... $3^{2008} \equiv 0[9]$ منه $3^{2008} = 9 \times 3^{2006}$ أي $3^{2008} = 3^2 \times 3^{2006}$
 (6)..... $4^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$
 (7) $5^{2008} \equiv 4^{2008}[9]$ أي $5^{2008} = (-4)^{2008}[9]$ إذن $5 \equiv -4[9]$
 $6^{2008} = 3^{2008} \times 2^{2008}$ إذن $6^{2008} \equiv 0[9]$ لأن $3^{2008} \equiv 0[9]$
 $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} = 1 - 2^{2008} + 0 - 4^{2008} + 4^{2008} - 0 + 2^{2008} - 1$
 $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008} \equiv 0[9]$ أي :
 إذن : العدد $1^{2008} - 2^{2008} + 3^{2008} - 4^{2008} + 5^{2008} - 6^{2008} + 7^{2008} - 8^{2008}$ مضاعف 9

التمرين - 18

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابلاً للقسمة على 4

الحل - 18

من أجل $n > 0$:

- (1)..... $1^{2n+1} \equiv 1[4]$
 (2) .. $3^{2n+1} \equiv -1[4]$ أي $3^{2n+1} = (-1)^{2n+1}[4]$ إذن $3 \equiv -1[4]$
 (3) $2^{2n+1} \equiv 0[4]$ أي $2^{2n+1} = 4 \times 2^{2n}$ إذن $2^{2n+1} = 2^2 \times 2^{2n}$
 (4) $4^{2n+1} \equiv 0[4]$
 بجمع الموافقات (1) ، (2) ، (3) ، (4) نحصل على :
 $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 1 + 0 - 1 + 0[4]$ أي $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 0[4]$
 إذن : العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4
 نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن العدد $1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1}$ قابل للقسمة على 4

التمرين - 19

برر أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$$\begin{array}{ll} 1785^n \equiv 0[5] & -3 \\ 7254^n \equiv 0[9] & -1 \\ 51502^n \equiv 0[11] & -4 \\ 3532^n \equiv 0[2] & -2 \end{array}$$

الحل - 19

$$\begin{array}{lll} 7254^n \equiv 0[9] & \text{أي} & 7254^n \equiv 0^n[9] \text{ منه } 7254 \equiv 0[9] \quad -1 \\ 3532^n \equiv 0[2] & \text{أي} & 3532^n \equiv 0^n[2] \text{ منه } 3532 \equiv 0[2] \quad -2 \\ 1785^n \equiv 0[5] & \text{أي} & 1785^n \equiv 0^n[5] \text{ منه } 1785 \equiv 0[5] \quad -3 \\ 51502^n \equiv 0[11] & \text{أي} & 51502^n \equiv 0^n[11] \text{ منه } 51502 \equiv 0[11] \quad -4 \end{array}$$

التمرين - 20

- 1 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3286)^{374}$ على 10
 2 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(76)^{784}$ على 12

الحل - 20

$$3286 \equiv 6[10] \text{ إذن } (3286)^{374} = (6)^{374}[10]$$

لندرس بواقي قسمة 6^n على 10 كمايلي :

$$\begin{array}{ll} 6^0 \equiv 1[10] & \\ 6^1 \equiv 6[10] & \\ 6^2 \equiv 6[10] & \\ 6^3 \equiv 6[10] & \end{array} \quad \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } n = 0 \text{ فإن } 6^n = 1[10] \\ \text{إذا كان } n \neq 0 \text{ فإن } 6^n = 6[10] \end{array} \right\}$$

نتيجة : $6^{374} \equiv 6[10]$ إذن : باقي قسمة $(3286)^{374}$ على 10 هو 6

$$2 - 76 = 4[12] \text{ إذن } (76)^{784} = (4)^{784}[12]$$

لندرس باقي قسمة 4^n على 12 كمايلي :

$$\begin{aligned} 4^0 &= 1[12] \\ 4^1 &= 4[12] \\ 4^2 &= 4[12] \\ 4^3 &= 4[12] \end{aligned} \quad \text{منه} \quad \left. \begin{aligned} \text{إذا كان } n=0 \text{ فإن } 4^n &= 1[12] \\ \text{إذا كان } n \neq 0 \text{ فإن } 4^n &= 4[12] \end{aligned} \right\}$$

$$\text{نتيجة : } 4^{784} \equiv 4[12] \text{ إذن : باقي قسمة } (76)^{784} \text{ على 12 هو 4}$$

التمرين - 21

- 1 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$
- 2 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ليس مضاعف 3 فإن $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

الحل - 21

$$1 - 3 \equiv -4[7] \text{ منه } 3^{2n} \equiv (-4)^{2n}[7]$$

$$3^{2n} \equiv 4^{2n}[7] \text{ أي}$$

$$3^{2n} \equiv 16^n[7] \text{ أي}$$

$$\text{أي : } 3^{2n} \equiv 2^n[7] \text{ لأن : } \left. \begin{aligned} 16 \equiv 2[7] \\ 16^n \equiv 2^n[7] \end{aligned} \right\} \text{ إذن}$$

$$\text{نتيجة : } 3^{2n} \equiv 2^n[7] \text{ لأن } 3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$$

2 - ليكن n عدد طبيعي ليس مضاعف 3

$$\text{إذن : } n = 3p + k \text{ حيث } p \text{ عدد طبيعي و } k \in \{1; 2\}$$

$$\text{إذن : } 2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{2(3p+k)} + 2^{3p+k} + 1$$

$$= 2^{6p} \times 2^{2k} + 2^{3p} \times 2^k + 1$$

$$= 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1$$

$$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 64^p \times 4^k + 8^p \times 2^k + 1[7] \text{ منه :}$$

$$\left. \begin{aligned} 64^p \equiv 1[7] \\ 8^p \equiv 1[7] \end{aligned} \right\} \text{ أي } \left. \begin{aligned} 64 \equiv 1[7] \\ 8 \equiv 1[7] \end{aligned} \right\} \text{ لأن } \left. \begin{aligned} 2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4^k + 2^k + 1[7] \\ 2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0[7] \end{aligned} \right\} \text{ أي :}$$

$$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0[7] \text{ من أجل } k=1$$

$$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 16 + 4 + 1 \equiv 0[7] \text{ من أجل } k=2$$

نتيجة : من أجل كل n غير مضاعف 3 فإن العدد $2^{2n} + 2^n + 1$ مضاعف 7

التمرين - 22

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

الحل - 22

$$2^{n+4} = 16 \times 2^n \text{ منه } 2^{n+4} = 2^n \times 2^4$$

$$3^{3n+2} = 3^{3n} \times 3^2 \text{ منه } 3^{3n+2} = (27)^n \times 9$$

$$\text{لدينا : } 16 \equiv 1[5] \text{ إذن : } 16 \times 2^n \equiv 2^n[5] \text{ أي } 2^{n+4} \equiv 2^n[5] \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{و } 27 \equiv 2[5] \text{ إذن : } (27)^n \equiv 2^n[5]$$

$$\text{من جهة أخرى : } 9 \equiv 4[5] \text{ أي } 9 \equiv -1[5]$$

$$\left. \begin{aligned} (27)^n \equiv 2^n[5] \\ 9 \equiv -1[5] \end{aligned} \right\} \text{ نتيجة : } 9 \times (27)^n \equiv -2^n[5] \text{ إذن}$$

$$(2) \dots \dots \dots 3^{3n+2} \equiv -2^n[5] \text{ أي}$$

$$2^{n+4} + 3^{3n+2} \equiv 2^n - 2^n[5] \text{ من (1) و (2) نستنتج أن :}$$

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5] \text{ أي : وهو المطلوب}$$

التمرين - 23

n عدد طبيعي . نضع $a = (9n - 1)10^n + 1$

برهن أن a مضاعف للعدد 9

الحل - 23

$$(1) \dots \dots \dots 9n - 1 \equiv -1[9] \text{ إذن : } 9n \equiv 0[9]$$

$$(2) \dots \dots \dots 10^n \equiv 1[9] \text{ إذن : } 10^n \equiv 1[9]$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(9n - 1)10^n \equiv -1[9]$ (3)

نكر (4)..... $1 \equiv 1[9]$

إذن : نجمع (3) و (4) : $(9n - 1)10^n + 1 \equiv -1 + 1[9]$

أي : $(9n - 1)10^n + 1 \equiv 0[9]$

أي $(9n - 1)10^n + 1$ مضاعف 9

التمرين - 24

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ مضاعف 17

الحل - 24

إذن : $3^{4n+2} = 9 \times (81)^n$

إذن : $2^{6n+3} = 8 \times (64)^n$

لدينا $\left. \begin{array}{l} 81 \equiv 13[17] \\ 64 \equiv 13[17] \end{array} \right\}$ إذن : $\left. \begin{array}{l} 81^n \equiv 13^n[17] \\ 64^n \equiv 13^n[17] \end{array} \right\}$

منه : $9 \times 81^n \equiv 9 \times 13^n[17]$

$8 \times 64^n \equiv 8 \times 13^n[17]$

إذن : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 9 \times 13^n + 8 \times 13^n[17]$

أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv (9 + 8) \times 13^n[17]$

أي : $9 \times 81^n + 8 \times 64^n \equiv 17 \times 13^n[17]$

أي : $3^{2+4n} + 2^{3+6n} \equiv 0[17]$

إذن : العدد $3^{2+4n} + 2^{3+6n}$ مضاعف 17

التمرين - 25

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ يقبل القسمة على 29

الحل - 25

إذن : $2^{5n+1} = 2 \times 2^{5n}$

إذن : $3^{n+3} = 3^3 \times 3^n$

إذن : $32 \equiv 3[29]$

منه : $2 \times 32^n \equiv 2 \times 3^n[29]$ (1)

من جهة أخرى : $27 \times 3^n \equiv 27 \times 3^n[29]$ (2)

نجمع (1) و (2) : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 2 \times 3^n + 27 \times 3^n[29]$

أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv (2 + 27) \times 3^n[29]$

أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 29 \times 3^n[29]$

أي : $2 \times 32^n + 27 \times 3^n \equiv 0[29]$

منه العدد $3^{n+3} + 2^{1+5n}$ يقبل القسمة على 29

التمرين - 26

n عدد طبيعي كافي .

1 - عين تبعا لقيم n باقي قسمة n^2 على 4

2 - برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^2 \equiv 1[8]$

الحل - 26

1 -

$n \equiv ?[4]$	0	1	2	3
$n^2 \equiv ?[4]$	0	1	0	1

2 - ليكن n عدد طبيعي فردي إن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

لندرس بواقي قسمة $(2k + 1)^2$ على 8 حسب قيم k

$k \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2k \equiv ?[8]$	0	2	4	6	0	2	4	6
$2k + 1 \equiv ?[8]$	1	3	5	7	1	3	5	7
$(2k + 1)^2 \equiv ?[8]$	1	1	1	1	1	1	1	1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $(2k+1)^2 \equiv 1[8]$

إذن : من أجل كل عدد فردي n فإن $n^2 \equiv 1[8]$

التمرين - 27

1 - برهن أن إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 - برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n ليس مضاعفاً لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

الحل - 27

1 - بواقي قسمة n^4 على 16 حسب قيم n

$n \equiv ?[16]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$n^4 \equiv ?[16]$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

نتيجة : إذا كان n فردي فإن $n^4 \equiv 1[16]$

2 - لندرس بواقي قسمة n^4 على 5 حسب قيم n

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^4 \equiv ?[5]$	0	1	1	1	1

نتيجة : إذا كان n لا يوافق 0 بترديد 5 فإن $n^4 \equiv 1[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفاً لـ 5 فإن باقي قسمة n^4 على 5 هو 1

التمرين - 28

1 - x عدد صحيح . اكمل الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$					

2 - استنتج مجموعة قيم العدد الصحيح x حيث $2x \equiv 3[5]$

الحل - 28

1 -

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

2 - يكون $2x \equiv 3[5]$ إذا وفقط إذا كان $x \equiv 4[5]$ أي $x = 5k + 4$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثلاً : من أجل $k = -3$: $x = -11$: إذن : $2x = -22$ و $-22 \equiv 3[5]$

من أجل $k = 2$: $x = 14$: إذن : $2x = 28$ و $28 \equiv 3[5]$

التمرين - 29

عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + n - 2$ قابلاً للقسمة على 7

الحل - 29

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$n^3 + n \equiv ?[7]$	0	2	3	2	5	4	5
$n^3 + n - 2 \equiv ?[7]$	5	0	1	0	3	2	3

نتيجة : يكون $n^3 + n - 2 \equiv 0[7]$ قابلاً للقسمة على 7 إذا وفقط إذا كان

أي $n \equiv 1[7]$ أو $n \equiv 3[7]$

منه قيم n المطلوبة هي $n = 7k + 1$ أو $n = 7k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين - 30

من أجل كل عدد طبيعي n نضع R_n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9

1 - أتمم الجدول التالي :

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n							

- 2 - استنتج R_n من أجل كل عدد طبيعي n
 3 - عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 65^n على 9
 4 - استنتج باقي قسمة العدد 65^{2011} على 9

الحل - 30

- 1

n	0	1	2	3	4	5	6
R_n	1	2	4	8	7	5	1

- 2 - إذا كان $n = 6k$ فإن $R_n = 1$
 إذا كان $n = 6k + 1$ فإن $R_n = 2$
 إذا كان $n = 6k + 2$ فإن $R_n = 4$
 إذا كان $n = 6k + 3$ فإن $R_n = 8$
 إذا كان $n = 6k + 4$ فإن $R_n = 7$
 إذا كان $n = 6k + 5$ فإن $R_n = 5$

3 - $65 \equiv 2[9]$ إذن : $65^n \equiv 2^n[9]$

إذن : بواقي قسمة 65^n على 9 هي نفسها بواقي قسمة 2^n على 9
 حسب الجدول التالي :

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة 65^n على 9	1	2	4	8	7	5

4 - $2011 = 6(335) + 1$ إذن : $2011 = 6k + 1$ منه : باقي قسمة 65^{2011} على 9 هو 2

التمرين - 31

- 1 - أوجد باقي قسمة العدد 4^5 على 11
 2 - استنتج بواقي القسمة على 11 لكل من الأعداد 37^k : 37^{5k+1} ، 37^{5k+2} ، 37^{5k+3} و 37^{5k+4} حيث $k \in \mathbb{N}$

الحل - 31

$$\begin{array}{ll} 4^0 \equiv 1[11] & 4^1 \equiv 4[11] \\ 4^{5k+1} \equiv 4[11] & 4^2 \equiv 5[11] \\ 4^{5k+2} \equiv 5[11] & \text{منه} \\ 4^{5k+3} \equiv 9[11] & 4^3 \equiv 9[11] \\ 4^{5k+4} \equiv 3[11] & 4^4 \equiv 3[11] \end{array}$$

 $4^5 \equiv 1[11]$ و هو المطلوب2 - $37 \equiv 4[11]$ إذن : $37^n \equiv 4^n[11]$ حيث $n \in \mathbb{N}$

إذن : بواقي قسمة 37^n على 11 هي نفسها بواقي قسمة 4^n على 11
 منه الجدول التالي :

n =	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
باقي قسمة 37^n على 11	1	4	5	9	3

التمرين - 32

عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $2x = 3y$

الحل - 32

إذا كان $(x; y)$ حل للمعادلة $2x = 3y$ فإن $2x - 3y = 0$ أي $2x \equiv 0[3]$
 لنبحث إذن عن قيم x كاميلي :

$$\begin{array}{ccc|c} x - 0[3] & 0 & 1 & 2 \\ 2x - 0[3] & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

إذن : يكون $2x \equiv 0[3]$ إذا وفقط إذا كان $x \equiv 0[3]$ أي $x = 3k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
 نعوض $x = 3k$ في المعادلة نحصل على : $2(3k) = 3y$
 منه : $y = 2k$

نتيجة : حلول المعادلة $2x - 3y$ في Z هي كل الثنائيات $(3k; 2k)$ حيث $k \in Z$

التمرين - 33

حل في Z^2 المعادلة ذات الجهول $(x; y)$ التالية : $2x - 5y = 1$ (1)

الحل - 33

المعادلة (1) تكافئ $2x = 5y + 1$

إذن : إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $2x \equiv 1[5]$

لنبحث إذن عن قيم x كمايلي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$2x \equiv ?[5]$	0	2	4	1	3

نتيجة : يكون $2x \equiv 1[5]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[5]$ أي $x = 5k + 3$ حيث $k \in Z$
نعوض x بـ $5k + 3$ في المعادلة (1) نحصل على

$$2(5k + 3) - 5y = 1$$

$$10k + 6 - 1 = 5y \quad \text{أي :}$$

$$10k - 5 = 5y \quad \text{أي :}$$

$$y = 2k - 1 \quad \text{أي :}$$

خلاصة : حلول المعادلة (1) في Z^2 هي الثنائيات $(5k + 3; 2k - 1)$ حيث $k \in Z$
مثلا : من أجل $k = 1$: $(8; 3)$ حل للمعادلة (1).

التمرين - 34

حل في Z الجمل التالية :

$$\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \quad -2 \quad \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \quad -1$$

الحل - 34

$$\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 (k \in Z) \end{cases} \quad -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k + 1 \equiv 3[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6k - 2[5] \\ x = 6k + 1 \end{cases}$$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $6k \equiv 2[5]$ كمايلي :

$k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$6k \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4

نتيجة : يكون $6k \equiv 2[5]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 2[5]$ أي $k = 5n + 2$ حيث $n \in Z$

$$x = 6(5n + 2) + 1$$

أي : $x = 30n + 13$ و هي حلول الجملة المطلوبة حيث $n \in Z$

$$\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[2] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases} \quad -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 : k \in Z \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 4(2k + 1) \equiv 1[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k + 1 \\ 8k + 4 - 1[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2k+1 \\ 8k \equiv 0[3] \end{cases}$$

لنبحث عن قيم k حتى يكون $8k \equiv 0[3]$ كمايلي :

$k \equiv ?[3]$	0	1	2
$8k \equiv ?[3]$	0	2	1

إن : يكون $8k \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $k \equiv 0[3]$ أي $k = 3n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

نتيجة : $x = 2(3n) + 1$ أي $x = 6n + 1$ هي حلول الجملة المطلوبة . حيث $n \in \mathbb{Z}$

التمرين 35

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس العشري

$$c = 503019 \quad ; \quad b = 5723 \quad ; \quad a = 12734$$

الحل 35

$$12734 = 4 + 3 \times 10 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^4 \quad - 1$$

$$5723 = 3 + 2 \times 10 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^3 \quad - 2$$

$$503019 = 9 + 1 \times 10 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^4 + 5 \times 10^5 \quad - 3$$

التمرين 36

أنشر الأعداد الطبيعية التالية المكتوبة في النظام ذي الأساس 6

$$c = 503012 \quad ; \quad b = 1523 \quad ; \quad a = 234$$

الحل 36

$$234 = 4 + 3 \times 6 + 2 \times 6^2 \quad - 1$$

$$1523 = 3 + 2 \times 6 + 5 \times 6^2 + 1 \times 6^3 \quad - 2$$

$$503012 = 2 + 1 \times 6 + 0 \times 6^2 + 3 \times 6^3 + 0 \times 6^4 + 5 \times 6^5 \quad - 3$$

التمرين 37

أكتب في النظام ذو الأساس 7 الأعداد التالية :

$$a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 \quad - 1$$

$$b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 \quad - 2$$

$$c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 \quad - 3$$

الحل 37

$$a = 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5 = 1235 \quad - 1$$

$$b = 5 \times 7^2 + 2 \times 7 = 520 \quad - 2$$

$$c = 6 \times 7^3 + 2 \times 7 + 1 = 6021 \quad - 3$$

التمرين 38

a عدد طبيعي حيث $a \geq 5$

$$N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3$$

أكتب العدد N في النظام ذو الأساس a

الحل 38

$a \geq 5$ إذن : كل من الأعداد $0, 1, 2, 3, 4$ هي أرقام في النظام ذو الأساس a

$$N = 4a^5 + 2a^3 + a + 3 \quad \text{إذن :}$$

$$= 4a^5 + 0 \times a^4 + 2 \times a^3 + 0 \times a^2 + a + 3$$

$$= 402013 \quad \text{في النظام ذو الأساس } a$$

التمرين 39

العددان 2306 و 1035 مكتوبان في النظام ذو الأساس x

1 - ما هي أصغر قيمة ممكنة للعدد x

2 - أنشر العددين وفق الأساس x

الحل - 39

- 1 - أكبر رقم يحتوي عليه العدادان هو الرقم 6 إذن : أصغر قيمة للأساس x هي 7
 2 - من أجل $x \geq 7$ فإن :

$$\begin{array}{r} 2306 \\ 1035 \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 + 0 \times x + 3x^2 + 2x^3 \\ - 5 + 3x + 0 \times x^2 + x^3 \end{array}$$

التمرين - 40

إليك الأعداد 2 ؛ 4 ؛ 7 ؛ 33 مكتوبة في النظام العشري .
 أعد كتابتها في النظام الثنائي .

الحل - 40

$$\begin{array}{lcl} 2 = \overline{10} & : & \text{إذن } 2 = 0 + 2^1 \\ 4 = \overline{100} & : & \text{إذن } 4 = 0 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 \\ 7 = \overline{111} & : & \text{إذن } 7 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 \\ 33 = \overline{100001} & : & \text{إذن } 33 = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 \end{array}$$

التمرين - 41

n عدد طبيعي يكتب في النظام الثنائي $\overline{1101101}$
 ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كمايلي 214

الحل - 41

لنبحث عن n في النظام العشري :

$$\begin{array}{r} \overline{1101101} = 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 \\ 1 + 4 + 8 + 32 + 64 \\ = 109 \end{array}$$

ليكن n مكتوب من الشكل $\overline{214}$ في النظام x حيث $x \geq 5$

$$\overline{214} = 4 + x + 2x^2 \quad : \text{إذن}$$

$$4 + x + 2x^2 = 109 \quad : \text{نتيجة}$$

أي : $2x^2 + x - 105 = 0$ هي معادلة من الدرجة (2) ذات

المجهول الطبيعي x حيث $x \geq 5$

$$\Delta = 1 + 840 = (29)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1 - 29}{4} = \frac{-15}{2} \\ x_2 = \frac{-1 + 29}{4} = 7 \end{array} \right\} : \text{إذن}$$

إذن : العدد n يكتب من الشكل $\overline{214}$ في النظام ذو الأساس 7

التمرين - 42

ما هو أساس التعداد الذي يكون فيه : $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$

الحل - 42

ليكن x أساس التعداد المطلوب . حيث $x \in \mathbb{N}$ و $x \geq 5$

$$\begin{cases} \overline{2003} = 3 + 0x + 0x^2 + 2x^3 = 2x^3 + 3 \\ \overline{21} \times \overline{43} = (1 + 2x)(3 + 4x) = 8x^2 + 10x + 3 \end{cases}$$

$$2x^3 + 3 = 8x^2 + 10x + 3$$

$$2x(x^2 - 4x - 5) = 0 \quad : \text{أي}$$

منه : $x^2 - 4x - 5 = 0$ لأن $x \geq 5$ أي $x \neq 0$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{4 + 6}{2} = 5 \end{array} \right\}$$

إذن : يكون $\overline{2003} = \overline{21} \times \overline{43}$ في النظام ذو الأساس 5

التمرين 43

في كل حالة من الحالات التالية أوجد أساس التعداد الذي تكون فيه المساواة محققة :

$$\overline{411} = \overline{15 \times 23} \quad - 1$$

$$\overline{21 \times 14} = \overline{324} \quad - 2$$

الحل 43

$$\overline{411} = \overline{15 \times 23} \quad - 1 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس التعداد إذن } x \geq 6$$

$$\overline{411} = \overline{1 + x + 4x^2}$$

$$\overline{15 \times 23} = (5 + x)(3 + 2x) = 2x^2 + 13x + 15$$

$$4x^2 + x + 1 = 2x^2 + 13x + 15$$

منه

$$2x^2 - 12x - 14 = 0$$

أي :

$$\Delta = 144 + 112 = 256 = (16)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12 - 16}{4} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \frac{12 + 16}{4} = 7 \end{cases}$$

نتيجة : المساواة $\overline{411} = \overline{15 \times 23}$ محققة في النظام ذي الأساس 7

$$\overline{21 \times 14} = \overline{324} \quad - 2 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس التعداد إذن } : x \geq 5$$

$$\overline{21 \times 14} = (2x + 1)(x + 4) = 2x^2 + 9x + 4$$

$$\overline{324} = 3x^2 + 2x + 4$$

$$3x^2 + 2x + 4 = 2x^2 + 9x + 4$$

منه :

$$x^2 - 7x = 0$$

أي :

$$x(x - 7) = 0$$

أي :

$$\begin{cases} x = 0 & \text{مرفوض} \\ x = 7 \end{cases}$$

أي :

نتيجة : المساواة $\overline{21 \times 14} = \overline{324}$ محققة في النظام ذو الأساس 7

التمرين 44

في أي أساس تعداد x يكون $\overline{162} = \overline{77} + \overline{63}$ ؟ احسب $\overline{77 \times 63}$ في النظام العشري ثم في النظام ذو الأساس 8

الحل 44

$$\overline{162} = x^2 + 6x + 2 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس التعداد . إذن } x \geq 8$$

$$\overline{77} + \overline{63} = 7x + 7 + 6x + 3 = 13x + 10$$

$$x^2 + 6x + 2 = 13x + 10$$

إذن :

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

أي :

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7 - 9}{2} = -1 & \text{مرفوض} \\ x_2 = \frac{7 + 9}{2} = 8 \end{cases}$$

نتيجة : أساس التعداد هو $x = 8$

$$\overline{77} = 7 \times 8 + 7 = 56 + 7 = 63$$

منه :

$$\overline{63} = 6 \times 8 + 3 = 48 + 3 = 51$$

$$\overline{77 \times 63} = 63 \times 51 = 3213$$

إذن :

منه : العدد $\overline{77 \times 63}$ يكتب 3213 في النظام العشري .

حساب العدد $\overline{77 \times 63}$ في النظام ذو الأساس 8

الطريقة الأولى : إجراء عملية الضرب عموديا كمايلي :

العملية	الخطوات
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 7 = 21 \quad 2 \times 8 + 5 = 25 \\ \hline \end{array}$ <p>نكتب 5 و نحتفظ بـ 2</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 7 = 21 \\ 21 + 2 = 23 \\ \hline 23 \quad 2 \times 8 + 7 = 27 \\ \hline \end{array}$ <p>نكتب 27 دون احتفظ</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \end{array}$	<p>نضع نقطة و نكمل العملية</p> $6 \times 7 = 42 = 5 \times 8 + 2 = 52$ <p>نكتب 2 و نحتفظ بـ 5</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \end{array}$	$6 \times 7 = 42$ $42 + 5 = 47$ $47 = 5 \times 8 + 7 = 57$ <p>نكتب 57 دون احتفظ</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \\ \oplus \\ \hline 572 \end{array}$	$5 + 0 = 5$ $7 + 2 = 9 = 1 \times 8 + 1 = 11$ <p>نكتب 1 و نحتفظ بـ 1</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \\ \oplus \\ \hline 572 \end{array}$	$2 + 7 = 9$ $9 + 1 = 10$ $10 = 1 \times 8 + 2 = 12$ <p>نكتب 2 و نحتفظ بـ 1</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \\ \oplus \\ \hline 572 \end{array}$	$0 + 5 = 5$ $5 + 1 = 6$ <p>نكتب 6 (دون احتفظ)</p>
$\begin{array}{r} 77 \\ \times 63 \\ \hline 275 \\ \oplus \\ \hline 572 \end{array}$	6215

نتيجة :

$$\begin{aligned} \overline{77} \times \overline{63} &= \overline{6215} \\ 6215 &= 6 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 1 \times 8 + 5 \\ &= 3072 + 128 + 8 + 5 \\ &= 3213 \end{aligned}$$

تحقيق :

الطريقة الثانية : لدينا في النظام العشري

إذن : بإجراء عمليات القسمة على 8 نحصل على مايلي :

$$\begin{array}{r|l} 3213 & 8 \\ \hline 013 & 401 \\ \hline \boxed{5} & 01 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \hline 50 & 8 \\ \hline \boxed{1} & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \hline 6 & 6 \\ \hline \boxed{2} & 0 \end{array}$$

نتيجة : $3213 = \overline{6215}$ في النظام ذو الأساس 8إذن : $\overline{77} \times \overline{63} = \overline{6215}$

التمرين 45 -

عين فيمايلي أساس النظام الذي تكون فيه المساواة محققة :

$$\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276} \quad - 1$$

$$\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32} \quad - 2$$

الحل - 45

$$\overline{12} \times \overline{23} = \overline{276} \quad - 1 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس النظام حيث } x \geq 8$$

$$\overline{12} \times \overline{23} = (x+2)(2x+3) = 2x^2 + 7x + 6$$

$$\overline{276} = 2x^2 + 7x + 6$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 2x^2 + 7x + 6$$

إذن :

بما أن المعادلة محققة دائما فإن قيم x الممكنة هي كل الأعداد الطبيعية الأكبر أو تساوي 8

$$\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32} \quad - 2 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس النظام حيث } x \geq 6$$

$$\overline{541} = 5x^2 + 4x + 1$$

$$\overline{22} \times \overline{32} = (2x+2)(3x+2) = 6x^2 + 10x + 4$$

$$5x^2 + 4x + 1 = 6x^2 + 10x + 4$$

إذن :

$$x^2 + 6x + 3 = 0$$

أي :

$$\Delta = 36 - 12 = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-6 - \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \\ x_2 = \frac{-6 + \sqrt{24}}{2} & \text{مرفوض} \end{cases}$$

نتيجة : لا يوجد أي أساس نظام تكون فيه المساواة $\overline{541} = \overline{22} \times \overline{32}$ محققة .

التمرين 46 -

أكتب في النظام الثنائي العددين 10 و 100 المكتوبين في النظام العشري

الحل - 46

بإجراء عمليات القسمة المتتالية كمايلي :

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 2} \\ \underline{0} 50 \\ 0 25 \\ 1 12 \\ 0 6 \\ 0 3 \\ 1 1 \\ 1 0 \end{array}$$

$$100 = \overline{1100100} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 2} \\ \underline{0} 5 \\ 1 2 \\ 0 1 \\ 1 0 \end{array}$$

$$10 = \overline{1010} \quad \text{إذن :}$$

التمرين 47 -

1 - في أي أساس تعداد يكون $\overline{51} = \overline{13} + \overline{35}$ (1)

2 - أكتب المساواة (1) في النظام الثنائي .

الحل - 47

$$\overline{51} = \overline{13} + \overline{35} \quad - 1 \quad \text{ليكن } x \text{ أساس التعداد حيث } x \geq 6$$

$$\overline{51} = 5x + 1$$

$$\overline{13} + \overline{35} = x + 3 + 3x + 5 = 4x + 8$$

$$5x + 1 = 4x + 8$$

إذن :

$$x = 7$$

أي :

نتيجة : نظام التعداد هو 7

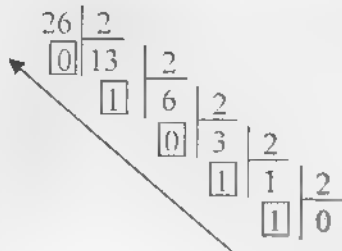
$$\overline{51} = 5 \times 7 + 1 = 36$$

- 2

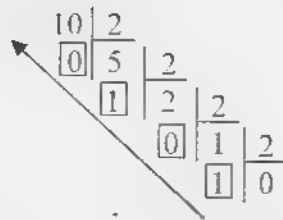
$$\overline{13} = 1 \times 7 + 3 = 10$$

$$\overline{35} = 3 \times 7 + 5 = 26$$

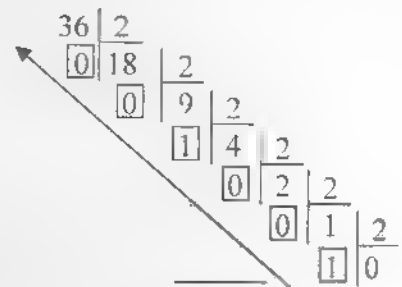
لتحويل الأعداد 26 ، 10 ، 36 إلى النظام الثنائي كمايلي :



$$26 = 11010$$



$$10 = 1010$$



$$36 = 100100$$

إذن : المساواة (1) تكتب في النظام الثنائي : $100100 = 1010 + 11010$

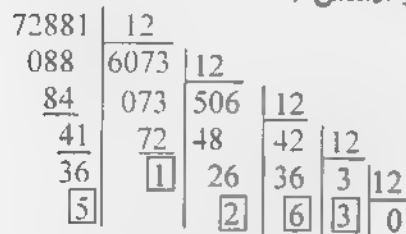
التمرين - 48

ليكن n عدد طبيعي يكتب في النظام العشري 72881

اكتب n في النظام ذو الأساس 12 ثم في النظام ذو الأساس 7

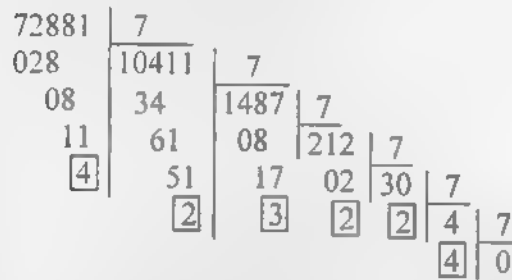
الحل - 48

1 - الكتابة في النظام ذو الأساس 12 :



$$72881 = 36215_{12}$$

2 - الكتابة في النظام ذو الأساس 7



$$72881 = 422324_7$$

التمرين - 49

اكتب في النظام العشري العدد 3752 المكتوب في النظام ذو الأساس 8

الحل - 49

$$\begin{aligned} 3752_8 &= 3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2 \\ &= 1536 + 448 + 40 + 2 \\ &= 2026 \end{aligned}$$

التمرين - 50

اكتب في النظام ذو الأساس 12 العدد 6175 المكتوب في النظام ذو الأساس 9

الحل - 50

نبحث أولاً عن العدد مكتوباً في النظام العشري كمايلي :

$$\begin{aligned} 6175_9 &= 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 7 \times 9 + 5 \\ &= 4374 + 81 + 63 + 5 \\ &= 4523 \end{aligned}$$

لنبحث الآن عن كتابة العدد 4523 في النظام ذو الأساس 12

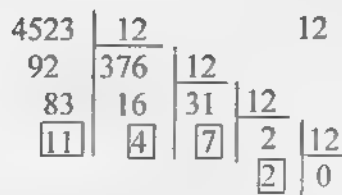
لاحظ أن 11 هو رقم في النظام ذو الأساس 12

إذن نرمز له بالرمز β

$$4523 = 274\beta_{12}$$

التمرين - 51

اكتب في النظام ذو الأساس 7 العددين 234 و 1040 المكتوبين في النظام ذو الأساس 5



الحل - 51

أولا نبحت عن كتابة الأعداد في النظام العشري كمايلي :

$$234 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 50 + 15 + 4 = 69$$

$$1040 = 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5 + 0 = 125 + 20 = 145$$

ثانيا نجري عمليات القسمة المتتالية على 7 كمايلي :

$$\begin{array}{r|l} 145 & 7 \\ \hline 05 & 20 \\ \hline \boxed{5} & \boxed{6} \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ \hline \boxed{2} & 2 \\ \hline \boxed{2} & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 69 & 7 \\ \hline \boxed{6} & 9 \\ \hline \boxed{2} & 1 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$$

$$145 = \overline{265} \quad \text{و} \quad 69 = \overline{126} \quad \text{إذن :}$$

التمرين - 52

a عدد طبيعي حيث $a > 1$

اكتب a ؛ a^2 ؛ a^3 في النظام ذو الأساس a

الحل - 52

من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 1$ لدينا :

$$a = \overline{10} \quad \text{إذن :} \quad a = 1 \times a + 0$$

$$a^2 = \overline{100} \quad \text{إذن :} \quad a^2 = 1 \times a^2 + 0 \times a + 0$$

$$a^3 = \overline{1000} \quad \text{إذن :} \quad a^3 = 1 \times a^3 + 0 \times a^2 + 0 \times a + 0$$

التمرين - 53

في النظام العشري A عدد طبيعي أكبر تماما من 2 و S مجموع أرقامه .

أثبت أن A يقبل القسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S يقبل القسمة على 3

الحل - 53

ليكن $A = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$ كتابة العدد A في النظام العشري .

$$\left. \begin{aligned} A &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \\ S &= a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :}$$

$$\text{لدينا } 10 \equiv 1[3] \quad \text{إذن :} \quad 10^k \equiv 1^k[3] \quad \text{حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{أي } 10^k \equiv 1[3]$$

$$\left. \begin{aligned} a_n \times 10^n &\equiv a_n[3] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} &\equiv a_{n-1}[3] \\ &\vdots \\ a_1 \times 10 &\equiv a_1[3] \end{aligned} \right\} \quad \text{إذن :} \quad \left. \begin{aligned} 10^n &\equiv 1[3] \\ 10^{n-1} &\equiv 1[3] \\ &\vdots \\ 10 &\equiv 1[3] \end{aligned} \right\} \quad \text{منه :}$$

$$\text{منه :} \quad a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1[3]$$

$$\text{إذن :} \quad a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0[3]$$

$$\text{أي :} \quad A \equiv S[3]$$

نتيجة : يكون $A \equiv 0[3]$ إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[3]$

أي يكون a قابلا للقسمة على 3 إذا و فقط إذا كان S قابلا للقسمة على 3

التمرين - 54

x و y عدنان طبيعيان يكتبان في النظام العشري بنفس الأرقام لكن في ترتيبين متعاكسين .

برهن أن الفرق $x - y$ مضاعف للعدد 9

الحل - 54

$$\text{ليكن } x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

$$\text{إذن :} \quad y = a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \\ y &= a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n \end{aligned} \right\} \quad \text{منه :}$$

إذن : $x - y = (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \dots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n)$
 لكن $10 \equiv 1[9]$ إذن : $10^k \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي k

$$\left. \begin{array}{l} (a_n - a_0) \times 10^n \equiv a_n - a_0[9] \\ (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} \equiv a_{n-1} - a_1[9] \\ \vdots \\ (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv a_1 - a_{n-1}[9] \end{array} \right\} \text{ إذن : } \left. \begin{array}{l} 10^n \equiv 1[9] \\ 10^{n-1} \equiv 1[9] \\ \vdots \\ 10 \equiv 1[9] \end{array} \right\} \text{ منه :}$$

$$(1) \dots (a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \dots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + \dots + (a_1 - a_{n-1})[9]$$

من جهة أخرى $a_0 - a_n \equiv a_n - a_0[9]$

إذن بالجمع مع العبارة (1) نحصل على :

$$(a_n - a_0) \times 10^n + (a_{n-1} - a_1) \times 10^{n-1} + \dots + (a_1 - a_{n-1}) \times 10 + (a_0 - a_n) \equiv (a_n - a_0) + (a_{n-1} - a_1) + \dots + (a_1 - a_{n-1}) + (a_0 - a_n)$$

أي : $x - y \equiv a_n - a_0 + a_{n-1} - a_1 + \dots + a_1 - a_{n-1} + a_0 - a_n[9]$
 أي : $x - y \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n)[9]$
 أي : $x - y \equiv 0[9]$

أي : $x - y$ يقبل القسمة على 9

التمرين 55

إملا الجدول التالي الذي يمثل جدول الجمع في النظام ذو الأساس 4. ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} + \overline{132}$

\oplus	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$				
$\overline{1}$				
$\overline{2}$				
$\overline{3}$				

مثلا : $\overline{3} + \overline{3} = \overline{12}$
 لأن : $3 + 3 = 6 = 1 \times 4 + 2$

الحل - 55

- 1

\oplus	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

2 - لننجز العملية $\overline{3223} + \overline{132}$ عموديا :

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 3223 \\ \hline 10021 \end{array}$$

نتيجة : $\overline{3223} + \overline{132} = \overline{10021}$

التمرين 56

أنجز جدول الضرب في النظام ذو الأساس 4. ثم أنجز العملية التالية : $\overline{3223} \times \overline{123}$

\otimes	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$

منه العملية التالية :

الإحتفاظ الثاني $\rightarrow 111$ الإحتفاظ الأول $\rightarrow 222$

$$\begin{array}{r}
 \otimes \overline{3223} \\
 \underline{\overline{123}} \\
 \oplus \overline{23001} \\
 \oplus \overline{13112} \\
 \underline{\overline{3223}} \\
 \overline{1203021}
 \end{array}$$

$$8 = 2 \times 4 + 0 = \overline{20}$$

$$11 = 2 \times 4 + 3 = \overline{23}$$

$$7 = 1 \times 4 + 3 = \overline{13}$$

$$6 = 1 \times 4 + 2 = \overline{12}$$

$$\overline{3223} \times \overline{123} = \overline{1203021} \quad \text{نتيجة :}$$

التمرين - 57

انجز العمليات التالية في النظام ذو الأساس 5 :

$$\begin{array}{r}
 213 \\
 \times 14 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 431 \\
 - 132 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3421 \\
 + 230 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

الحل - 57

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 12 \\ 213 \end{array} \\
 \times \begin{array}{c} 14 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1412 \\ 2130 \end{array} \\
 \hline
 = 4042
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 431 \\
 - 132 \\
 \hline
 = 244
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 11 \\ 3421 \end{array} \\
 + \begin{array}{c} 230 \end{array} \\
 \hline
 = 4201
 \end{array}$$

التمرين - 58

انجز في النظام ذو الأساس 12 العمليات التالية حيث α هو رمز 10 و β هو رمز 11

$$\begin{array}{r}
 27 \\
 \times 41 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400\alpha \\
 - 39\beta 7 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 39\beta 7 \\
 + 213 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

الحل - 58

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 2 \\ 27 \end{array} \\
 \times \begin{array}{c} 41 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 27 \\ \alpha 40 \end{array} \\
 \hline
 = \alpha 67
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400\alpha \\
 - 39\beta 7 \\
 \hline
 = 0213
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 11 \\ 39\beta 7 \end{array} \\
 + \begin{array}{c} 213 \end{array} \\
 \hline
 = 400\alpha
 \end{array}$$

التمرين - 59

1 - عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 102 - إستنتج حسب قيم n رقم أحاد العدد 2^n 3 - عين رقم أحاد العدد $(3548)^9 \times (2534)^{31}$

$$\begin{array}{lcl}
 2^0 \equiv 1[10] & \text{إذا كان} & n = 0 \\
 (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 2[10] & \text{إذا كان} & n = 4k + 1 \\
 (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 4[10] & \text{إذا كان} & n = 4k + 2 \\
 (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 8[10] & \text{إذا كان} & n = 4k + 3 \\
 (k \in \mathbb{N}^*) \quad 2^n \equiv 6[10] & \text{إذا كان} & n = 4k
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2^0 \equiv 1[10] \\ (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 2[10] \\ (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 4[10] \\ (k \in \mathbb{N}) \quad 2^n \equiv 8[10] \\ (k \in \mathbb{N}^*) \quad 2^n \equiv 6[10] \end{array}} \right\} \text{منه}$$

$$\begin{array}{l}
 2^0 \equiv 1[10] \\
 2^1 \equiv 2[10] \\
 2^2 \equiv 4[10] \\
 2^3 \equiv 8[10] \\
 2^4 \equiv 6[10] \\
 2^5 \equiv 2[10] \\
 2^6 \equiv 4[10] \\
 2^7 \equiv 8[10] \\
 2^8 \equiv 6[10]
 \end{array}$$

2 - حسب السؤال الأول فإن :

$$\begin{array}{l}
 \text{إذا كان } n = 0 \text{ فإن رقم أحاد } 2^n \text{ هو } 1 \\
 \text{إذا كان } n = 4k + 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \text{ فإن رقم أحاد } 2^n \text{ هو } 2 \\
 \text{إذا كان } n = 4k + 2 \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \text{ فإن رقم أحاد } 2^n \text{ هو } 4 \\
 \text{إذا كان } n = 4k + 3 \text{ حيث } k \in \mathbb{N} \text{ فإن رقم أحاد } 2^n \text{ هو } 8 \\
 \text{إذا كان } n = 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{N}^* \text{ فإن رقم أحاد } 2^n \text{ هو } 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \left. \begin{array}{l} 2534 \equiv 2^2[10] \\ 3548 \equiv 2^3[10] \end{array} \right\} \text{أي} & \left. \begin{array}{l} 2534 \equiv 4[10] \\ 3548 \equiv 8[10] \end{array} \right\} & - 3 \\
 \left. \begin{array}{l} (2534)^{31} \equiv 2^{2 \times 31}[10] \\ (3548)^9 \equiv 2^{3 \times 9}[10] \end{array} \right\} & \text{منه} & \\
 \left. \begin{array}{l} 2534^{31} \equiv 2^{62}[10] \\ 3548^9 \equiv 2^{27}[10] \end{array} \right\} & \text{أي} &
 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{62} \equiv 4[10] \\ 2^{27} \equiv 8[10] \end{array} \right\} : \text{إذن} \quad \left. \begin{array}{l} 62 = 4 \times 15 + 2 \\ 27 = 4 \times 6 + 3 \end{array} \right\} \text{لكن}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2534^{31} \times 3548^9 \equiv 8 \times 4[10] \\ 2534^{31} \times 3548^9 \equiv 2[10] \end{array} \right\} : \text{منه} \quad \left. \begin{array}{l} 2534^{31} \equiv 4[10] \\ 3548^9 \equiv 8[10] \end{array} \right\} \text{أي}$$

نتيجة : رقم أحاد العدد $2534^{31} \times 3548^9$ هو 2

التمرين - 60

ماهما الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008}

الحل - 60

لإيجاد الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} يكفي إيجاد باقي قسمته على 100
 إذن لندرس بواقى قسمة 51^n على 100 كمايلي :

$$\begin{array}{lcl}
 51^0 \equiv 1[100] & & \\
 51^1 \equiv 51[100] & \text{منه} & \\
 51^2 \equiv 1[100] & & \\
 51^3 \equiv 51[100] & & \\
 \left. \begin{array}{l} 51^n \equiv 1[100] \text{ فإن } n = 2k \\ 51^n \equiv 51[100] \text{ فإن } n = 2k + 1 \end{array} \right\} & \text{منه} &
 \end{array}$$

نتيجة : $2008 = 2(1004)$ إذن : $51^{2008} \equiv 1[100]$ منه : الرقمين الأخيرين للعدد 51^{2008} هما 01 (الأحاد هو 1 و العشرات هو 0)

التمرين - 61

x ، y عددان صحيحان .

برهن أن العدد $xy(x^2 - y^2)$ مضاعف العدد 3

الحل - 61

نضع $A = xy(x^2 - y^2)$: إذن : $A = xy(x + y)(x - y)$
 إذا كان x مضاعف 3 أو y مضاعف 3 فإن A مضاعف 3

إذن يكفي أن نبرهن أن A مضاعف 3 من أجل x و y ليسا من مضاعفات 3 كمايلي :

$x = 3k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$	$y = 3n + 1$ $n \in \mathbb{Z}$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : $x - y$ مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in \mathbb{Z}$	$x + y = 3k + 1 + 3n + 2 = 3(k + n + 1)$ إذن : $x + y$ مضاعف 3 منه A مضاعف 3
$x = 3k + 2$ $k \in \mathbb{Z}$	$y = 3n + 1$ $n \in \mathbb{Z}$	$x + y = 3k + 2 + 3n + 1 = 3(k + n + 1)$ إذن : $x + y$ مضاعف 3 منه A مضاعف 3
	$y = 3n + 2$ $n \in \mathbb{Z}$	$x - y = 3k - 3n = 3(k - n)$ إذن : $x - y$ مضاعف 3 منه A مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل عددين صحيحين x, y فإن $xy(x^2 - y^2)$ مضاعف 3

التمرين - 62

أوجد كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $n^3 + 3n^2 + 3n - 7$ قابلاً للقسمة على 8

الحل - 62

$n^3 + 3n^2 + 3n - 7 \equiv 0[8]$ يكفي 8

$n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$ يكفي

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n^3 \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$n^2 \equiv ?[8]$	0	1	0	3	0	5	0	7
$3n^2 \equiv ?[8]$	0	3	4	3	0	3	4	3
$3n \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5
$n^3 + 3n^2 + 3n \equiv ?[8]$	0	7	2	7	4	7	6	7

نتيجة : $n^3 + 3n^2 + 3n \equiv 7[8]$ يكفي

$\left. \begin{array}{l} n \equiv 1[8] \\ n \equiv 3[8] \\ n \equiv 5[8] \\ n \equiv 7[8] \end{array} \right\}$

إذن قيم n المطلوبة هي كل الأعداد الطبيعية n التي تكتب على أحد الأشكال التالية

$n = 8k + 1$ ، $n = 8k + 3$ ، $n = 8k + 5$ ، $n = 8k + 7$ حيث k عدد طبيعي

مثلاً : من أجل $k = 1$: $8(1) + 1 = 9$: إذن : $9^3 + 3(9)^2 + 3(9) - 7 = 729 + 243 + 27 - 7 = 992$

$$= 992$$

$$= 8(124)$$

التمرين - 63

1 - كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $A = 2^n - 1$ قابلاً للقسمة على 9

2 - نفرض أن n يحقق الشرط المعين في السؤال (1) . برهن أن A يقبل القسمة على 7

ثم استنتج باقي قسمة A على 21

الحل - 63

1 - $A = 2^n - 1$ قابل للقسمة على 9 يكفي $2^n \equiv 1[9]$

يكافي $2^n \equiv 1[9]$

يكافي $2^n \equiv 1[9]$

نبحث عن بواقي قسمة 2^n على 9 كمايلي :

$$2^0 \equiv 1[9]$$

$$2^1 \equiv 2[9]$$

$$2^2 \equiv 4[9]$$

$$2^3 \equiv 8[9]$$

$$2^4 \equiv 7[9]$$

$$2^5 \equiv 5[9]$$

$$2^6 \equiv 1[9]$$

نتيجة : إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإن $2^n \equiv 1[9]$

منه : يكون $2^n - 1$ قابلا للقسمة على 9 إذا و فقط إذا كان $n = 6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

2- ليكن $n = 6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

$$A = 2^{6k} - 1 = 64^k - 1$$

$$64^k \equiv 1^k[7] \text{ إذن } 64 \equiv 1[7]$$

$$64^k \equiv 1[7] \text{ أي}$$

$$64^k - 1 \equiv 0[7] \text{ منه}$$

$$A \equiv 0[7] \text{ أي}$$

أي A يقبل القسمة على 7 و هو المطلوب

نتيجة : A يقبل القسمة على 9 إذن A يقبل القسمة على 3

A يقبل القسمة على 7

إذن : A يقبل القسمة على 21 لأن $21 = 7 \times 3$

منه : باقي قسمة A على 21 هو 0

التمرين 64

برهن أن إذا كان العدد الطبيعي n لا يقبل القسمة على 5 فإن العدد $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ يكون مضاعفا للعدد 5

الحل 64

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1
$n^2 - 1 \equiv ?[5]$	4	0	3	3	0
$n^2 - 4 \equiv ?[5]$	1	2	0	0	2
$(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv ?[5]$	4	0	0	0	0

نتيجة : إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4) \equiv 0[5]$

أي إذا كان n ليس مضاعفا لـ 5 فإن $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$ مضاعف لـ 5

التمرين 65

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $n(2n+1)(7n+1)$ يقبل القسمة على 6

الحل 65

1 -

$n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n \equiv ?[6]$	0	2	4	0	2	4
$7n \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n+1 \equiv ?[6]$	1	3	5	1	3	5
$7n+1 \equiv ?[6]$	1	2	3	4	5	0
$n(2n+1)(7n+1) \equiv ?[6]$	0	0	0	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n(2n+1)(7n+1)$ مضاعف 6

التمرين 66

n عدد طبيعي . نضع $A = n^2 - n + 1$

1- عين تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7

2 - استنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون A قابلاً للقسمة على 7

3 - عين باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7

الحل - 66

- 1

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^2 - n \equiv ?[7]$	0	0	2	6	5	6	2
$n^2 - n + 1 \equiv ?[7]$	1	1	3	0	6	0	3

نتيجة : إذا كان $n = 7k$ أو $n = 7k + 1$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 1

إذا كان $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 6$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 3

إذا كان $n = 7k + 4$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 6

إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ فإن باقي قسمة A على 7 هو 0

2 - حسب السور (1) يكون n قابلاً للقسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $n = 7k + 3$ أو $n = 7k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

3 - لاحظ أن العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ هو نفسه العدد A من أجل $n = 2753$

إذن : بما أن $2753 = 7(393) + 2$ فإن $A \equiv 3[7]$

أي باقي قسمة العدد $(2753^2 - 2753 + 1)$ على 7 هو 3

التمرين - 67

عين جميع الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $2n^3 - n^2 + 2$ يقبل القسمة على 7

الحل - 67

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv ?[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$n^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2n^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5
$2n^3 - n^2 \equiv ?[7]$	0	1	5	3	0	1	4
$2n^3 - n^2 + 2 \equiv ?[7]$	2	3	0	5	2	3	6

نتيجة : يكون العدد $2n^3 - n^2 + 2$ قابلاً للقسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $n \equiv 2[7]$

أي $n = 7k + 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين - 68

1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 4^n على 7

2 - استنتج حسب قيم n الطبيعي باقي قسمة العدد $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7

الحل - 68

$$4^0 \equiv 1[7]$$

- 1

$$4^1 \equiv 4[7]$$

$$4^2 \equiv 2[7]$$

$$4^3 \equiv 1[7]$$

$$\left. \begin{array}{l} 4^{3k} \equiv 1[7] \\ 4^{3k+1} \equiv 4[7] \\ 4^{3k+2} \equiv 2[7] \end{array} \right\} \text{ منه :}$$

نتيجة :

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
باقي قسمة 4^n على 7	1	4	2

$$851^{3n} \equiv 4^{3n}[7]$$

$$851^{2n} \equiv 4^{2n}[7]$$

$$851^n \equiv 4^n[7]$$

2 - $851 \equiv 4[7]$ إذن :

$$\left. \begin{array}{l} 851^{3n} \equiv 1[7] \\ 851^{2n} \equiv (4^n)^2[7] \\ 851^n \equiv 4^n[7] \end{array} \right\} \text{ أي حسب السؤال (1)}$$

$$851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 = 1 + (4^n)^2 + 4^n + 2[7] \text{ : منه}$$

$$851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \equiv 3 + 4^n + (4^n)^2[7] \text{ أي}$$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2
$(4^n)^2 \equiv ?[7]$	1	2	4
$4^n + (4^n)^2 + 3 \equiv ?[7]$	5	2	2

نتيجة :

- إذا كان $n = 3k$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7 هو 5
 إذا كان $n = 3k + 1$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7 هو 2
 إذا كان $n = 3k + 2$ فإن باقي قسمة $851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ على 7 هو 2

التمرين - 69

- 1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 9
 2 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلاً للقسمة على 9

الحل - 69

1 - $7^1 \equiv 1[9]$
 $7^2 \equiv 7[9]$
 $7^3 \equiv 4[9]$
 $7^4 \equiv 1[9]$
 منه : $\left. \begin{array}{l} 7^{3k} \equiv 1[9] \\ 7^{3k+1} \equiv 7[9] \\ 7^{3k+2} \equiv 4[9] \end{array} \right\}$

- 2 - ليكن $n \in \mathbb{N}$ إذن : إما $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$
 منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$7^n \equiv ?[9]$	1	7	4
$3n \equiv ?[9]$	0	3	6
$7^n + 3n \equiv ?[9]$	1	1	1
$7^n + 3n - 1 \equiv ?[9]$	0	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n
 $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$ فإن
 إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد
 $7^n + 3n - 1$ قابل للقسمة على 9

التمرين - 70

حل في مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} المعادلة $3x \equiv 7[8]$

الحل - 70

$x \equiv ?[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$3x \equiv ?[8]$	0	3	6	1	4	7	2	5

نتيجة : $3x \equiv 7[8]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 5[8]$
 منه حلول المعادلة $3x \equiv 7[8]$ هي الأعداد الطبيعية x التي تكتب من الشكل $x = 8k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين - 71

برهن أن لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

الحل - 71

$8x^2 \equiv 16[3]$ تكافئ $8x^2 \equiv 1[3]$ لأن $16 \equiv 1[3]$
 لنبحث عن بواقي قسمة $8x^2$ على 3

$x \equiv ?[3]$	0	1	2
$x^2 \equiv ?[3]$	0	1	1
$8x^2 \equiv ?[3]$	0	2	2

نتيجة : لا يوجد أي عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 1[3]$ (البواقي الممكنة حسب الجدول هي 0 و 2 فقط) إذن لا يوجد أي
 عدد صحيح x يحقق $8x^2 \equiv 16[3]$

التمرين 72

- 1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و 3^n على 7
2 - حل في مجموعة الأعداد الطبيعية N المعادلة $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ ذات المجهول x

الحل - 72

$$\left. \begin{array}{l} 2^{3k} \equiv 1[7] \\ 2^{3k+1} \equiv 2[7] \\ 2^{3k+2} \equiv 4[7] \end{array} \right\} \text{ منه } \begin{array}{l} 2^0 \equiv 1[7] \\ 2^1 \equiv 2[7] \\ 2^2 \equiv 4[7] \\ \hline 2^3 \equiv 1[7] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{6k} \equiv 1[7] \\ 3^{6k+1} \equiv 3[7] \\ 3^{6k+2} \equiv 2[7] \\ 3^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 3^{6k+4} \equiv 4[7] \\ 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{array} \right\} \text{ منه : } \begin{array}{l} 3^0 \equiv 1[7] \\ 3^1 \equiv 3[7] \\ 3^2 \equiv 2[7] \\ 3^3 \equiv 6[7] \\ 3^4 \equiv 4[7] \\ 3^5 \equiv 5[7] \\ \hline 3^6 \equiv 1[7] \end{array}$$

2 - حسب لسؤال الأول لدينا الجدول التالي :

$x \equiv ?[6]$	0	1	2	3	4	5
$2^x \equiv ?[7]$	1	2	4	1	2	4
$3^x \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$2^x + 3^x \equiv ?[7]$	2	5	6	0	6	2

نتيجة : $2^x + 3^x \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 3[6]$
أي الحلول هي الأعداد الطبيعية x من الشكل $x = 6k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين 73

عين قيم العدد الطبيعي x التي يكون من أجلها $5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11]$

الحل - 73

$$5^x - 3^x + 6 \equiv 0[11] \text{ تكافئ } 5^x - 3^x \equiv -6[11]$$

$$5^x - 3^x \equiv 5[11] \text{ تكافئ}$$

لندرس بواقي قسمة 5^x و 3^x على 11 حسب قيم العدد الطبيعي x كمايلي :

$$\left. \begin{array}{l} 5^{5k} \equiv 1[11] \\ 5^{5k+1} \equiv 5[11] \\ 5^{5k+2} \equiv 3[11] \\ 5^{5k+3} \equiv 4[11] \\ 5^{5k+4} \equiv 9[11] \end{array} \right\} \text{ منه : } \begin{array}{l} 5^0 \equiv 1[11] \\ 5^1 \equiv 5[11] \\ 5^2 \equiv 3[11] \\ 5^3 \equiv 4[11] \\ 5^4 \equiv 9[11] \\ \hline 5^5 \equiv 1[11] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{5k} \equiv 1[11] \\ 3^{5k+1} \equiv 3[11] \\ 3^{5k+2} \equiv 9[11] \\ 3^{5k+3} \equiv 5[11] \\ 3^{5k+4} \equiv 4[11] \end{array} \right\} \text{ منه : } \begin{array}{l} 3^0 \equiv 1[11] \\ 3^1 \equiv 3[11] \\ 3^2 \equiv 9[11] \\ 3^3 \equiv 5[11] \\ 3^4 \equiv 4[11] \\ \hline 3^5 \equiv 1[11] \end{array}$$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$5^x - ?[11]$	1	5	3	4	9
$3^x - ?[11]$	1	3	9	5	4
$5^x - 3^x \equiv ?[11]$	0	2	5	10	5

نتيجة : يكون $5^x - 3^x - 5[11]$ إذا و فقط إذا كان $x = 4[5]$ أو $x = 2[5]$
 منه قيم x المطلوبة هي : $x = 5k + 4$ أو $x = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين 74

- 1 - عين حسب قيم x بواقي قسمة x^2 على 5
- 2 - إستنتج أن المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ ذات المجهولين الطبيعيين x و y لا تقبل حلولاً .

الحل - 74

- 1

$x^2 \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv ?[5]$	0	1	4	4	1

- 2 - لفرض (x, y) البسيطة من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ هي حل للمعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$
 إذن : $x^2 = 5y^2 + 3$

منه : $x^2 \equiv 3[5]$ و هذا مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة x^2 على 5 هي $\{0; 1; 4\}$
 إذن : المعادلة $x^2 - 5y^2 = 3$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

التمرين 75

- 1 - x و y عدنان طبيعيان . نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة $7x^2 + 2y^3 = 3$ (1)
 أتمم الجدول التالي :

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$							
$2y^3 \equiv ?[7]$							

- 2 - إستنتج أن المعادلة (1) لا تقبل حلولاً في \mathbb{N}^2

الحل - 75

- 1

$y \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \equiv ?[7]$	0	1	1	6	1	6	6
$2y^3 \equiv ?[7]$	0	2	2	5	2	5	5

- 2 - لتكن الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ حلاً للمعادلة (1)

إذن : $7x^2 + 2y^3 = 3$

أي : $2y^3 = -7x^2 + 3$

أي : $2y^3 \equiv 3[7]$ مستحيل حسب السؤال (1) لأن البواقي الممكنة لقسمة $2y^3$ على 7 هي $\{0; 2; 5\}$

إذن : المعادلة (1) لا تقبل حلولاً في \mathbb{N}^2

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين 1 -

نعتبر في مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} المعادلة ذات المجهولين x و y التالية : $3^x = 8 + y^2$ (1)

- 1 - نأش حساب قيم x بواقي قسمة 3^x ثم y^2 على 8
- 2 - برهن أن إذا كان x فردي فإن المعادلة (1) لا تقبل حولا
- 3 - نفرض أن $x = 2n$. حلل العبارة $3^{2n} - y^2$ ثم بين أن $3^n \leq 8$
- 4 - استنتج الثنائية $(x; y)$ التي تحقق المعادلة (1)

الحل - 1

$$\left. \begin{array}{l} 3^{2k} \equiv 1[8] \\ 3^{2k+1} \equiv 3[8] \end{array} \right\} \text{ منه : } \begin{array}{l} 3^0 \equiv 1[8] \\ 3^1 \equiv 3[8] \\ 3^2 \equiv 1[8] \end{array}$$

$\frac{x}{2}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$3^x \equiv ?[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

2 - ليكن x فردي إذن : $3^x \equiv 3[8]$

إذن : إذا وجدت ثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

$$y^2 = 3^x - 8$$

$$y^2 \equiv 3^x[8]$$

ي : $y^2 \equiv 3[8]$ مستحيل حسب السؤال الأول لأن بواقي قسمة y^2 على 8 هي $\{0; 1; 4\}$

منه : المعادلة (1) لا تقبل حولا من أجل x فردي

3 - ليكن $x = 2n$ حيث $n \in \mathbb{N}$

$$3^{2n} - y^2 = (3^n - y)(3^n + y)$$

إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $3^x = 8 + y^2$

$$3^x - y^2 = 8$$

أي من أجل $x = 2n$ فإن : $(3^n - y)(3^n + y) = 8$

منه : $3^n + y$ يقسم 8

$$3^n + y \leq 8$$

أي $3^n \leq 8$ لأن $y \geq 0$

4 - حسب السؤال (3) : $3^n \leq 3$: إذن : $n \in \{0; 1\}$

$x = 2n$: إذن : $x \in \{0; 2\}$

من أجل $x = 0$ نحصل على : $1 = 8 + y^2$ مستحيل .

من أجل $x = 2$ نحصل على : $9 = 8 + y^2$ منه $y^2 = 1$ أي $y = 1$ لأن $y \in \mathbb{N}$

نتيجة : الحل الوحيد للمعادلة (1) في مجموعة الأعداد الطبيعية هو $x = 2$; $y = 1$

التمرين 2 -

ليكن p عدد طبيعي أولي أكبر من أو يساوي 7 . نضع $n = p^4 - 1$

1 - برهن أن p يوافق 1 - أو 1 بترديد 3 ثم استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 3

2 - أثبت أنه يوجد عدد طبيعي k حيث يكون $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ ثم استنتج أن العدد n يقبل القسمة على 16

3 - باستعمال البواقي الممكنة لقسمة p على 5 أثبت أن 5 هو قاسم للعدد n

الحل - 2

$$\left. \begin{array}{l} \text{إما } p \equiv 0[3] \text{ مستحيل لأن } p \text{ لا يقبل قاسم أصغر منه} \\ p \equiv 1[3] \text{ أو } \\ p \equiv 2[3] \text{ أو } \end{array} \right\} \text{ إذن : } p \geq 7 \text{ أولي و } p - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} p \equiv 1[3] \\ \text{أو } p \equiv -1[3] \text{ لأن } 2 \equiv -1[3] \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$\left. \begin{array}{l} p^4 \equiv 1[3] \\ \text{أو } p^4 \equiv 1[3] \text{ لأن } (-1)^4 \equiv 1[3] \end{array} \right\} \text{إذن : } \left. \begin{array}{l} p \equiv 1[3] \\ \text{أو } p \equiv -1[3] \end{array} \right\} \text{لدينا :}$$

$$\left. \begin{array}{l} p^4 \equiv 1[3] \\ p^4 \equiv 1[3] \end{array} \right\} \text{أي}$$

$$p^4 \equiv 1[3] \text{ أي}$$

$$n \equiv 0[3] \text{ أي}$$

$$\text{أي } n \text{ يقبل القسمة على } 3$$

$$p \geq 2 \text{ أولي و } p \geq 7 \text{ إذن } p \text{ فردي منه يوجد عدد طبيعي } k \text{ حيث } p = 2k + 1 \text{ (لأن } p \geq 7)$$

$$\text{إذن : } p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$$

$$= 4k(k + 1) \text{ وهو المطلوب .}$$

$$n = p^4 - 1$$

نتيجة :

$$= (p^2 - 1)(p^2 + 1)$$

$$p = 2k + 1 \text{ لأن } = 4k(k + 1)[(2k + 1)^2 + 1]$$

$$= 4k(k + 1)(4k^2 + 4k + 2)$$

$$= 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$$

نميز حالتين :

$$\text{الأولى : } k \text{ زوجي إذن : } k = 2q \text{ منه } n = 16q(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$$

$$\text{إذن : } n \text{ يقبل القسمة على } 16$$

$$\text{الثانية : } k \text{ فردي إذن } (k + 1) \text{ زوجي}$$

$$\text{أي } k + 1 = 2q \text{ منه } n = 16kq(2k^2 + 2k + 1)$$

$$\text{إذن : } n \text{ يقبل القسمة على } 16$$

$$\text{خلاصة : من أجل كل قيمة لـ } p \text{ فإن } n \text{ يقبل القسمة على } 16$$

$$3 - \text{ليكن } p \text{ أولي إذن بواقى قسمة } p \text{ على } 5 \text{ هي } \{1; 2; 3; 4\}$$

$p \equiv 1[5]$	1	2	3	4
$p^2 \equiv 1[5]$	1	4	4	1
$p^4 \equiv 1[5]$	1	1	1	1
$p^4 - 1 \equiv 0[5]$	0	0	0	0

$$\text{نتيجة : من أجل أي قيمة للعدد } p \text{ فإن } p^4 - 1 \equiv 0[5] \text{ أي } 5 \text{ قاسم لـ } n$$

التمرين - 3

$$1 - \text{برهن أن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ يكون } 1000n \equiv n[111]$$

$$2 - \text{استنتج أن الأعداد التالية تقبل القسمة على } 111 : \{111, 100010001, 10001000001\}$$

الحل - 3

$$1 - 1000 = 9(111) + 1 \text{ إذن : } 1000 \equiv 1[111]$$

$$\text{منه : } 1000n \equiv n[111]$$

$$2 - \text{لدينا } 111111 = 111 \times 1000 + 111$$

$$\left. \begin{array}{l} 1000 \times 111 \equiv 111[111] \\ 111 \equiv 0[111] \end{array} \right\} \text{لكن}$$

$$\text{إذن : } 111 \times 1000 + 111 \equiv 111[111]$$

$$\text{أي : } 111111 \equiv 0[111]$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 \times 1000 \equiv 100[111] \\ 10 \equiv 10[111] \end{array} \right\} \text{لدينا :}$$

$$100010000 \equiv 110[111] \text{ منه : } 100010000 \equiv 110[111] \text{ لأن } 1000 \equiv 1[111]$$

$$\text{إذن : } 100010001 \equiv 111[111] \text{ (إضافة } 1 \text{ إلى الطرفين)}$$

$$\text{أي } 100010001 \equiv 0[111]$$

$$1000 = 1[111] \text{ لأن } 100010000000 = 110[111] \text{ إذن : } 100010000 = 110[111]$$

$$\text{منه } 100010000001 = 111[111] \text{ (إضافة 1 إلى الطرفين)}$$

$$100010000001 - 0[111] \text{ أي}$$

التمرين - 4

a عدد طبيعي . باقي قسمته على 8 هو 2 وباقي قسمته على 104 هو r

1 - برهن أن $r \equiv 2[8]$.

2 - ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

b عدد طبيعي باقي قسمته على 13 هو 3 وباقي قسمته على 104 هو r

3 - برهن أن $r \equiv 3[13]$

4 - ماهي القيم الممكنة لـ r ؟

ليكن x عدد طبيعي باقي قسمته على 8 هو 2 ، وعلى 13 هو 3 وعلى 104 هو r

5 - استنتج من (1) و (2) قيمة r

الحل - 4

1 - $a \equiv 2[8]$ إذن : $a = 8n + 2$ حيث $n \in \mathbb{N}$ $a \equiv r[104]$ إذن : $a = 104k + r$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و $0 \leq r < 104$ نتيجة : $a = 104k + r$ إذن : $a = 8 \times 13k + r$ أي $a = 8k' + r$ حيث $k' = 13k$ منه : $a \equiv a[8]$ لأن $8k' + r \equiv 8n + 2[8]$ أي : $r \equiv 2[8]$ 2 - لدينا $\left. \begin{array}{l} 0 \leq r < 104 \\ r \equiv 2[8] \end{array} \right\}$ إذن : $r \in \{2; 10; 18; 26; 34; 42; 50; 58; 66; 74; 82; 90; 98\}$ 3 - $b \equiv 3[13]$ إذن : $b = 13n + 3$ حيث $n \in \mathbb{N}$ $b \equiv r[104]$ إذن : $b = 104k + r$ حيث $k \in \mathbb{N}$ منه $b = 13 \times 8k + r$ أي $b = 13k' + r$ حيث $k' = 8k$ منه $b \equiv b[13]$ لأن $13k' + r \equiv 13n + 3[13]$ أي : $r \equiv 3[13]$ 4 - $\left. \begin{array}{l} 0 \leq r < 104 \\ r \equiv 3[13] \end{array} \right\}$ إذن : $r \in \{3; 16; 29; 42; 55; 68; 81; 94\}$ 5 - $\left. \begin{array}{l} x \equiv 2[8] \\ x \equiv 3[13] \\ x \equiv r[104] \end{array} \right\} (\alpha)$ نضع $A = \{2; 10; 18; 26; 34; 42; 50; 58; 66; 74; 82; 90; 98\}$ $B = \{3; 16; 29; 42; 55; 68; 81; 94\}$ إذن : تكون الجملة (α) محققة إذا وفقط إذا كان $r \in A \cap B$ أي $r = 42$

التمرين - 5

1 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل القيم 1, 2, 3, 4, 5 للعدد الطبيعي n2 - استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11 من أجل كل عدد طبيعي n3 - بين أن العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

الحل - 5

1 - $5^1 \equiv 5[11]$ $5^2 \equiv 3[11]$ $5^3 \equiv 4[11]$ $5^4 \equiv 9[11]$ $5^5 \equiv 1[11]$

2 - حسب السؤال (1) نستنتج أن :

$$\text{إذا كان } n = 5k \text{ فإن } 5^n \equiv 1[11]$$

$$\text{إذا كان } n = 5k + 1 \text{ فإن } 5^n \equiv 5[11]$$

$$\text{إذا كان } n = 5k + 2 \text{ فإن } 5^n \equiv 3[11]$$

$$\text{إذا كان } n = 5k + 3 \text{ فإن } 5^n \equiv 4[11]$$

$$\text{إذا كان } n = 5k + 4 \text{ فإن } 5^n \equiv 9[11]$$

$$\left. \begin{aligned} 5^{2008} &\equiv 4[11] \\ 5^{1428} &\equiv 4[11] \end{aligned} \right\} \text{ إذن } \left. \begin{aligned} 2008 &= 5(401) + 3 \\ 1428 &= 5(285) + 3 \end{aligned} \right\} - 3$$

$$5^{2008} - 5^{1428} \equiv 0[11] \text{ منه}$$

أي العدد $(5^{2008} - 5^{1428})$ يقبل القسمة على 11

التمرين - 6

1 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل القيم 1, 2, 3, 4, 5, 6 للعدد الطبيعي n

2 - إستنتج بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n

3 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $(3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2})$ على 7

الحل - 6

$$3^1 \equiv 3[7] \quad - 1$$

$$3^2 \equiv 2[7]$$

$$3^3 \equiv 6[7]$$

$$3^4 \equiv 4[7]$$

$$3^5 \equiv 5[7]$$

$$3^6 \equiv 1[7]$$

2 - حسب السؤال (1) فإن :

$$\text{إذا كان } n = 6k \text{ فإن } 3^n \equiv 1[7]$$

$$\text{إذا كان } n = 6k + 1 \text{ فإن } 3^n \equiv 3[7]$$

$$\text{إذا كان } n = 6k + 2 \text{ فإن } 3^n \equiv 2[7]$$

$$\text{إذا كان } n = 6k + 3 \text{ فإن } 3^n \equiv 6[7]$$

$$\text{إذا كان } n = 6k + 4 \text{ فإن } 3^n \equiv 4[7]$$

$$\text{إذا كان } n = 6k + 5 \text{ فإن } 3^n \equiv 5[7]$$

$$3 - \text{ 10} \equiv 3[7] \text{ إذن : } 10^{1408} \equiv 3^{1408}[7]$$

$$\text{بما أن } 1408 = 6(234) + 4 \text{ فإن } 10^{1408} \equiv 4[7]$$

$$\text{إذن : } 10^{1408} \equiv 4[7] \text{ (1)}$$

$$\text{بما أن } 1988 = 6(331) + 2 \text{ فإن } 3^{1988} \equiv 2[7] \text{ (2)}$$

$$\text{لدينا : } 9^{3n+2} = 3^{2(3n+2)} = 3^{6n+4}$$

$$\text{إذن : } 9^{3n+2} \equiv 4[7]$$

$$3^{1988} \equiv 2[7]$$

$$10^{1408} \equiv 4[7]$$

$$9^{3n+2} \equiv 4[7]$$

خلاصة :

$$\text{إذن : } 3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 2 + 4 + 4[7]$$

$$\text{أي } 3^{1988} + 10^{1408} + 9^{3n+2} \equiv 3[7] \text{ (باقي القسمة هو 3)}$$

التمرين - 7

1 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل القيم 1, 2, 3, 4 للعدد الطبيعي n ثم إستنتج

بواقي القسمة على 5 للعدد 2^n ثم 3^n على 5 من أجل كل عدد طبيعي n

2 - أوجد باقي القسمة على 5 لكل من الأعداد 2^{14} و 3^{10}

3 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n})$ يقبل القسمة على 5

الحل - 7

$$2^1 \equiv 2[5] \quad 1$$

$$2^2 \equiv 4[5]$$

$$2^3 \equiv 3[5]$$

$$2^4 \equiv 1[5]$$

منه النتائج التالية : إذا كان $n = 4k$ فإن $2^n \equiv 1[5]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $2^n \equiv 2[5]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $2^n \equiv 4[5]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $2^n \equiv 3[5]$

من جهة أخرى : $3 \equiv -2[5]$ إذن $3^n \equiv (-2)^n[5]$

إذن : $\left. \begin{aligned} 3^n &\equiv 2^n[5] \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 3^n &\equiv -2^n[5] \text{ إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\}$

منه النتائج التالية :

إذا كان $n = 4k$ فإن $3^n \equiv 1[5]$

إذا كان $n = 4k + 1$ فإن $3^n \equiv -2[5]$ أي $3^n \equiv 3[5]$

إذا كان $n = 4k + 2$ فإن $3^n \equiv 4[5]$

إذا كان $n = 4k + 3$ فإن $3^n \equiv -3[5]$ أي $3^n \equiv 2[5]$

$$2^{14} \equiv 4[5] \quad \text{إذن} \quad 14 = 4(3) + 2$$

$$3^{10} \equiv 4[5] \quad \text{إذن} \quad 10 = 4(2) + 2$$

3 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $\left. \begin{aligned} 3^{4n+1} &\equiv 3[5] \\ 2^{4n} &\equiv 1[5] \end{aligned} \right\}$

إذن : $\left. \begin{aligned} 2 \times 3^{4n+1} &\equiv 2 \times 3[5] \\ 2^{4n} &\equiv 1[5] \end{aligned} \right\}$

أي : $\left. \begin{aligned} 2 \times 3^{4n+1} &\equiv 1[5] \\ 2^{4n} &\equiv 1[5] \end{aligned} \right\}$

منه $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n} \equiv 0[5]$ إذن $2 \times 3^{4n+1} - 2^{4n}$ يقبل القسمة على 5

التمرين - 8

n عدد طبيعي .

1 - أدرس تبعا لقيم n بوانتي قسمة 5^n على 7

2 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7

3 - عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7

الحل - 8

1 -

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
$6k$	1
$6k + 1$	5
$6k + 2$	4
$6k + 3$	6
$6k + 4$	2
$6k + 5$	3

$$5^0 \equiv 1[7]$$

$$5^1 \equiv 5[7]$$

$$5^2 \equiv 4[7]$$

$$5^3 \equiv 6[7]$$

$$5^4 \equiv 2[7]$$

$$5^5 \equiv 3[7]$$

$$5^6 \equiv 1[7] \quad \text{منه :}$$

2 - $6 \equiv -1[7]$ إذن $6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \equiv 1[7]$ أي $6^{2n} \equiv 1[7]$

منه باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7 هو 1

3 - يكون $5^n + 6^{2n} + 3$ قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7]$

أي : $5^n + 1 + 3 \equiv 0[7]$ لأن $6^{2n} \equiv 1[7]$

أي : $5^n \equiv -4[7]$

أي : $5^n \equiv 3[7]$

منه : حسب بواقي قسمة 5^n على 7 فإن $6k+5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين 9

- 1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5
- 2 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7
- 3 - عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها باقي قسمة 2^n على كل من 5 و 7 هو 4

الحل 9

1 -

قيم n	باقي قسمة 2^n على 5
$4k$	1
$4k+1$	2
$4k+2$	4
$4k+3$	3

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1[5] \\ 2^1 &= 2[5] \\ 2^2 &= 4[5] \\ 2^3 &= 3[5] \\ 2^4 &= 1[5] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

2 -

قيم n	باقي قسمة 2^n على 7
$3p$	1
$3p+1$	2
$3p+2$	4

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1[7] \\ 2^1 &= 2[7] \\ 2^2 &= 4[7] \\ 2^3 &= 1[7] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

- 3 - يكون باقي قسمة 2^n على 7 و على 5 هو 4 إذا و فقط إذا تحقق الشرطين

$$\left. \begin{aligned} n &= 4k+2 \\ n &= 3p+2 \end{aligned} \right\} \text{التاليين :}$$

$$\begin{aligned} 4k+2 &= 3p+2 \\ 4k &= 3p \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

إذن يكفي أن يكون $k=3q$ و $p=4q$ حيث $q \in \mathbb{N}$

منه : $n=12q+2$ حيث $q \in \mathbb{N}$

أي $n \equiv 2[12]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين 10

عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(n-1)$ مضاعف 3

و العدد $[1 + (n-1)2^n]$ قابلاً للقسمة على 7

الحل 10

$(n-1)$ مضاعف 3 أي $n-1 \equiv 0[3]$ منه $n \equiv 1[3]$ أي $n=3p+1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

إذن : $n=3p+1$

$$2^n = 2^{3p+1} = 2 \times 2^{3p} = 2 \times 8^p \quad \text{منه :}$$

$$8^p \equiv 1^p[7] \quad \text{لدينا } 8 \equiv 1[7] \text{ إذن}$$

$$8^p \equiv 1[7] \quad \text{أي}$$

$$2 \times 8^p \equiv 2[7] \quad \text{منه :}$$

$$(n=3p+1) \quad 2^n \equiv 2[7] \quad \text{أي :}$$

$$(n-1)2^n \equiv 2(3p+1-1)[7] \quad \text{منه :}$$

$$(n-1)2^n \equiv 6p[7] \quad \text{أي}$$

$$1 + (n-1)2^n \equiv 1 + 6p[7] \quad \text{منه :}$$

نتيجة : يكون $1 + (n-1)2^n$ قابلاً للقسمة على 7 و $(n-3)$ مضاعف 3 إذا و فقط إذا كان

$$\left. \begin{aligned} 1 + (n-1)2^n &\equiv 0[7] \\ n &= 3p+1 \end{aligned} \right\}$$

$$n=3p+1 \quad \text{أي}$$

$$1 + 6p \equiv 0[7]$$

لندرس إذن بواقي قسمة $1+6p$ على 7 كمايلي :

$p \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$6p \equiv ?[7]$	0	6	5	4	3	2	1
$6p+1 \equiv ?[7]$	1	0	6	5	4	3	2

نتيجة : $1 + 6p \equiv 0[7]$ إذا و فقط إذا كان $p \equiv 1[7]$ أي $p = 7k + 1$

خلاصة : $\left. \begin{array}{l} p = 7k + 1 \\ n = 3p + 1 \end{array} \right\}$ منه : $n = 3(7k + 1) + 1$ أي : $n = 21k + 4$ حيث $k \in \mathbb{N}$ أي : $n \equiv 4[21]$ هي قيم n المطلوبة .

التمرين 11

- 1 - عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^k على 5 من أجل القيم من 1 إلى 8 للعدد الطبيعي k
- 2 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن باقي القسمة الإقليدية لـ 2^{4n} على 5 هو 1
- 3 - استنتج باقي قسمة 17^{4n} على 5
- 4 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3$ يقبل القسمة على 5

الحل 11

$$\begin{array}{lll} 2^0 \equiv 1[5] & , & 2^4 \equiv 1[5] \\ 2^1 \equiv 2[5] & , & 2^5 \equiv 2[5] \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2^2 \equiv 4[5] & , & 2^6 \equiv 4[5] \\ 2^3 \equiv 3[5] & , & 2^7 \equiv 3[5] \end{array}$$

2 - لدينا $2^{4n} = 16^n$

بما أن $16 \equiv 1[5]$ فإن $16^n \equiv 1^n[5]$

أي $16^n \equiv 1[5]$

منه : $2^{4n} \equiv 1[5]$ و هو المطلوب

3 - $17 \equiv 2[5]$ إذن : $17^{4n} \equiv 2^{4n}[5]$

أي $17^{4n} \equiv 1[5]$ حسب السؤال (2)

4 - حسب السؤال (1) فإن $2^{4n+3} \equiv 3[5]$ (1)

من جهة أخرى : $17^{4n+2} = 17^{4n} \times 17^2$

لدينا $\left. \begin{array}{l} 17^{4n} \equiv 1[5] \text{ حسب السؤال (3)} \\ 17^2 \equiv 4[5] \end{array} \right\}$

إذن : $17^{4n} \times 17^2 \equiv 1 \times 4[5]$ أي $17^{4n+2} \equiv 4[5]$ (2)

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2^{4n+3} + 17^{4n+2} \equiv 3 + 4[5]$

منه $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 3 + 4 + 3[5]$

أي : $2^{4n+3} + 17^{4n+2} + 3 \equiv 0[5]$ و هو المطلوب

التمرين 12

1 - عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لـ 4^n على 11

2 - عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ يقبل القسمة على 11

الحل 12

1 -

قيم n	باقي قسمة 4^n على 11
$5k$	1
$5k + 1$	4
$5k + 2$	5
$5k + 3$	9
$5k + 4$	3

$$\begin{array}{l} 4^0 \equiv 1[11] \\ 4^1 \equiv 4[11] \\ 4^2 \equiv 5[11] \\ 4^3 \equiv 9[11] \\ 4^4 \equiv 3[11] \\ 4^5 \equiv 1[11] \end{array}$$

منه

2 - $26 \equiv 4[11]$ إذن : $26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 4^2 \times 4^{10n}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 16 \times 4^{5(2n)}[11]$

أي $26^{10n+2} \equiv 5 \times 1[11]$ لأن $4^{5k} \equiv 1[11]$

$$\begin{aligned}
 26^{10n+2} + 7 &\equiv 5 + 7[11] & \text{منه} \\
 (1) \dots\dots\dots 26^{10n+2} + 7 &\equiv 1[11] & \text{أي} \\
 1995^n &\equiv 4^n[11] & \text{إذن } 1995 \equiv 4[11] \\
 (2) \dots\dots\dots 6 \times 1995^n &\equiv 6 \times 4^n[11] & \text{منه} \\
 6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 &\equiv 1 + 6 \times 4^n[11] & \text{بجمع (1) و (2):} \\
 & \text{منه الجدول التالي:}
 \end{aligned}$$

$n \equiv ?[5]$	0	1	2	3	4
$4^n \equiv ?[11]$	1	4	5	9	3
$6 \times 4^n \equiv ?[11]$	6	2	8	10	7
$1 + 6 \times 4^n \equiv ?[11]$	7	3	9	0	8

نتيجة: يكون $1 + 6 \times 4^n$ مضاعف 11 أي $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ قابل للقسمة على 11 إذا وفقط إذا كان $n \equiv 3[5]$ أي قيم n المطلوبة هي $n = 5k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التعريف 13 -

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
- أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7
- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ يقبل القسمة على 7

الحل - 13

- 1

قيم n	باقي قسمة 5^n على 7
$6k$	1
$6k + 1$	5
$6k + 2$	4
$6k + 3$	6
$6k + 4$	2
$6k + 5$	3

$$\begin{aligned}
 5^0 &\equiv 1[7] \\
 5^1 &\equiv 5[7] \\
 5^2 &\equiv 4[7] \\
 5^3 &\equiv 6[7] \\
 5^4 &\equiv 2[7] \\
 5^5 &\equiv 3[7] \\
 5^6 &\equiv 1[7]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - 2 \quad 26 &\equiv 5[7] \quad \text{إذن: } 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \\
 5^{6n+5} &\equiv 3[7] \quad \text{لأن } 5^{6n+5} \equiv 3[7] \quad \text{منه} \\
 47 &\equiv 5[7] \quad \text{إذن: } 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7] \\
 47^{12n+2} &\equiv (5^{6n+1})^2[7] \quad \text{أي} \\
 47^{12n+2} &\equiv 5^2[7] \quad \text{لأن } 5^{6n+1} \equiv 5[7] \quad \text{أي} \\
 47^{12n+2} &\equiv 4[7] \quad \text{أي} \\
 2 \times 47^{12n+2} &\equiv 2 \times 4[7] \quad \text{منه} \\
 2 \times 47^{12n+2} &\equiv 1[7] \quad \text{أي}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 26^{6n+5} &\equiv 3[7] \\
 2 \times 47^{12n+2} &\equiv 1[7] \\
 3 &\equiv 3[7]
 \end{aligned} \right\} \text{ خلاصة: }$$

$$\begin{aligned}
 \text{إذن بالجمع: } 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 &\equiv 0[7] \\
 - 3 \quad \text{حسب السؤال السابق: } 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 &\equiv 0[7] \\
 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} &\equiv 4[7] \quad \text{إذن:} \\
 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n &\equiv 5n + 4[7] \quad \text{إذن:} \\
 \text{نتيجة: يكون العدد } 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n &\text{ قابلاً للقسمة على 7} \\
 \text{إذا وفقط إذا كان العدد } 5n + 4 &\text{ قابلاً للقسمة على 7 أي } 5n + 4 \equiv 0[7] \\
 \text{أي } 5n &\equiv 3[7] \\
 \text{لندرس إذن بواقي قسمة } 5n &\text{ على 7 كمايلي:}
 \end{aligned}$$

$n \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$5n \equiv ?[7]$	0	5	3	1	6	4	2

منه : $5n \equiv 3[7]$ يكافئ $n \equiv 2[7]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 7k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين - 14

1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 13

2 - عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعف للعدد 13

الحل - 14

- 1

قيم n	باقي قسمة 3^n على 13
$3k$	1
$3k + 1$	3
$3k + 2$	9

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1[13] \\ 3^1 &\equiv 3[13] \\ 3^2 &\equiv 9[13] \\ 3^3 &\equiv 1[13] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

2 - لدينا : $4(3^{n+1} - 1) = 4(3 \times 3^n - 1)$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$3^n \equiv ?[13]$	1	3	9
$3 \times 3^n \equiv ?[13]$	3	9	1
$3 \times 3^n - 1 \equiv ?[13]$	2	8	0
$4(3 \times 3^n - 1) \equiv ?[13]$	8	6	0

نتيجة : يكون العدد $4(3^{n+1} - 1)$ مضاعفاً لـ 13 إذا و فقط إذا كان $n \equiv 2[3]$

أي $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين - 15

عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد $15(16^{n+1} - 1)$ على 7

الحل - 15

$16 \equiv 2[7]$ إذن : $16^{n+1} \equiv 2^{n+1}[7]$

أي : $16^{n+1} \equiv 2 \times 2^n[7]$

منه : $16^{n+1} - 1 \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

$15 \equiv 1[7]$

من جهة أخرى :

إذن : $15(16^{n+1} - 1) \equiv 2 \times 2^n - 1[7]$

لندرس إذن بواقي قسمة 2^n على 7 كمايلي :

$$\begin{aligned} 2^{3k} &\equiv 1[7] & 2^0 &\equiv 1[7] \\ 2^{3k+1} &\equiv 2[7] & 2^1 &\equiv 2[7] \\ 2^{3k+2} &\equiv 4[7] & 2^2 &\equiv 4[7] \\ & & 2^3 &\equiv 1[7] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[3]$	0	1	2
$2^n \equiv ?[7]$	1	2	4
$2 \times 2^n \equiv ?[7]$	2	4	1
$2 \times 2^n - 1 \equiv ?[7]$	1	3	0

خلاصة : بواقي قسمة $15(16^{n+1} - 1)$ على 7 هي كمايلي :

إذا كان $n = 3k$ فإن الباقي هو 1

إذا كان $n = 3k + 1$ فإن الباقي هو 3

إذا كان $n = 3k + 2$ فإن الباقي هو 0

التمرين - 16

- 1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لـ 3^n على 10
 2 - استنتج باقي القسمة الإقليدية على 10 للعدد $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$
 3 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1} [10]$
 4 - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$

الحل - 16

- 1

قيم n	باقي قسمة 3^n على 10
$4k$	1
$4k+1$	3
$4k+2$	9
$4k+3$	7

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1 [10] \\ 3^1 &\equiv 3 [10] \\ 3^2 &\equiv 9 [10] \\ 3^3 &\equiv 7 [10] \\ 3^4 &\equiv 1 [10] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

$$9^{2001} = 3^{2(2001)} = 3^{4002} \quad - 2$$

بما أن $4002 = 4(1000) + 2$ فإن $3^{4002} \equiv 9 [10]$ أي $9^{2001} \equiv 9 [10] \dots\dots (1)$

من جهة أخرى $63 \equiv 3 [10]$

$$63 \times 9^{2001} \equiv 3 \times 9 [10] \quad \text{إذن :}$$

$$63 \times 9^{2001} \equiv 7 [10] \quad \text{أي}$$

$$7^{1422} \equiv (-3)^{1422} [10] \quad \text{إذن : } 7 \equiv -3 [10] \quad \text{أيضا :}$$

$$7^{1422} \equiv 3^{1422} [10] \quad \text{لأن الأس زوجي}$$

بما أن $1422 = 4(355) + 2$ فإن $3^{1422} \equiv 9 [10]$

$$7^{1422} \equiv 9 [10] \quad \text{إذن :}$$

$$\left. \begin{aligned} 63 \times 9^{2001} &\equiv 7 [10] \\ 7^{1422} &\equiv 9 [10] \end{aligned} \right\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 7 - 9 [10] \quad \text{إذن :}$$

$$63 \times 9^{2001} - 7^{1422} \equiv 8 [10] \quad \text{أي}$$

إذن : باقي قسمة $63 \times 9^{2001} - 7^{1422}$ على 10 هو 8

$$3n \times 9^n \equiv n \times 3^{2n+1} [10] \quad \text{منه } 3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = n \times 3^{2n+1} \quad - 3$$

$$7^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1} [10] \quad \text{إذن : } 7 \equiv -3 [10] \quad \text{من جهة أخرى :}$$

$$7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} [10] \quad \text{لأن } 7^{2n+1} = -3^{2n+1} \quad \text{أي}$$

$$\left. \begin{aligned} 3n \times 9^n &\equiv n \times 3^{2n+1} [10] \\ 7^{2n+1} &\equiv -3^{2n+1} [10] \end{aligned} \right\} \quad \text{نتيجة :}$$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv n \times 3^{2n+1} - 3^{2n+1} [10] \quad \text{إذن :}$$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1} [10] \quad \text{أي : وهو المطلوب}$$

$$- 4 \quad \text{يكون } 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10] \quad \text{إذا وفقط إذا كان } (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0 [10]$$

إذن يكفي أن ندرس بواقي قسمة العدد $(n-1) \times 3^{2n+1}$ على 10 كمايلي :

$$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n$$

$$9^n \equiv (-1)^n [10] \quad \text{فإن } 9 \equiv -1 [10]$$

$$\left. \begin{aligned} 9^n &\equiv 1 [10] \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 9^n &\equiv -1 [10] \quad \text{إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي :}$$

$$\left. \begin{aligned} 9^n &\equiv 1 [10] \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي} \\ 9^n &\equiv 9 [10] \quad \text{إذا كان } n \text{ فردي} \end{aligned} \right\} \quad \text{أي}$$

منه الجدول التالي :

$n \equiv ?[10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n - 1 \equiv ?[10]$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$9^n \equiv ?[10]$	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9
$3 \times 9^n \equiv ?[10]$	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7
$(n-1) \times 3 \times 9^n \equiv ?[10]$	7	0	3	4	9	8	5	2	1	6

نتيجة : يكون $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 1[10]$

أي : $n = 10k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

مثلا : من أجل $n = 1$: $3 \times 9 + 7^3 = 27 + 343 = 370 \equiv 0[10]$ و $370 \equiv 0[10]$

التمرين - 17

- 1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 4^n على 7
- 2 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلا للقسمة على 7
- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
- 3 - أحسب بدلالة n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- 4 - ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S قابلا للقسمة على 7

الحل - 17

- 1

قيم n	باقي قسمة 3^n على 7
$6k$	1
$6k + 1$	3
$6k + 2$	2
$6k + 3$	6
$6k + 4$	4
$6k + 5$	5

$$\begin{aligned}
 3^1 &\equiv 3[7] \\
 3^2 &\equiv 2[7] \\
 3^3 &\equiv 6[7] \\
 3^4 &\equiv 4[7] \\
 3^5 &\equiv 5[7] \\
 3^6 &\equiv 1[7] \text{ منه}
 \end{aligned}$$

قيم n	باقي قسمة 4^n على 7
$3p$	1
$3p + 1$	4
$3p + 2$	2

$$\begin{aligned}
 4^0 &\equiv 1[7] \\
 4^1 &\equiv 4[7] \\
 4^2 &\equiv 2[7] \\
 4^3 &\equiv 1[7] \text{ منه}
 \end{aligned}$$

- 2 $1424 \equiv 3[7]$ إذن : $1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7]$

أي : $1424^{6n+1} \equiv 3[7]$ حسب السؤال (1)

$2006 \equiv 4[7]$ إذن : $2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7]$

أي : $2006^{3n+2} \equiv 2[7]$ حسب السؤال (1)

منه : $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 2 \times 2[7]$

أي : $2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$

نتيجة : $\left. \begin{aligned} 1424^{6n+1} &\equiv 3[7] \\ 2 \times 2006^{3n+2} &\equiv 4[7] \end{aligned} \right\}$

إذن : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 3 + 4[7]$

أي : $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$ و هو المطلوب

- 3

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= (2 \times 3^0 + 3 \times 4^0) + (2 \times 3^1 + 3 \times 4^1) + \dots + (2 \times 3^n + 3 \times 4^n)$

$= 2(3^0 + 3^1 + \dots + 3^n) + 3(4^0 + 4^1 + \dots + 4^n)$

$= 2\left(\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}\right) + 3\left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}\right)$

$= 3^{n+1} - 1 + 4^{n+1} - 1$

$$= 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

4 - يكون S قابلاً للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $S \equiv 0[7]$

$$\text{أي } 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7]$$

$$\text{أي } 3^n + 4^n \equiv 2[7]$$

$$\text{أي } 3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$$

لندرس إذن بواقي قسمة $3 \times 3^n + 4 \times 4^n$ على 7 كمايلي :

$n - [6]$	0	1	2	3	4	5
$3^n \equiv ?[7]$	1	3	2	6	4	5
$3 \times 3^n \equiv ?[7]$	3	2	6	4	5	1
$4^n \equiv ?[7]$	1	4	2	1	4	2
$4 \times 4^n \equiv ?[7]$	4	2	1	4	2	1
$3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv ?[7]$	0	4	0	1	0	2

نتيجة : $3 \times 3^n + 4 \times 4^n \equiv 2[7]$ إذا و فقط إذا كان $n \equiv 5[6]$

إذن : قيم n المطلوبة هي $n = 6k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين - 18

1 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10
2 - استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي k فإن العدد $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$

3 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $S_{n+4} \equiv S_n[10]$

4 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10

الحل - 18

- 1

قيم n	باقي قسمة 7^n على 10
$4k$	1
$4k + 1$	7
$4k + 2$	9
$4k + 3$	3

$$\begin{aligned} 7^0 &\equiv 1[10] \\ 7^1 &\equiv 7[10] \\ 7^2 &\equiv 9[10] \\ 7^3 &\equiv 3[10] \\ 7^4 &\equiv 1[10] \end{aligned} \quad \text{منه :}$$

2 - حسب السؤال (1) فإن من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

$$\left. \begin{aligned} 7^{4k} &\equiv 1[10] \\ 7^{4k+1} &\equiv 7[10] \\ 7^{4k+2} &\equiv 9[10] \\ 7^{4k+3} &\equiv 3[10] \end{aligned} \right\} \text{منه } \begin{aligned} 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} &\equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \\ 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} &\equiv 0[10] \end{aligned}$$

3 - من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$S_{n+4} = S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}$$

$$\text{إذن : } S_{n+4} \equiv S_n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4}[10]$$

$$\text{لكن } 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \equiv 0[10] \text{ حسب السؤال (2)}$$

لأن الأعداد $n+1$ ، $n+2$ ، $n+3$ ، $n+4$ متتالية .

$$\text{إذن : } S_{n+4} \equiv S_n[10]$$

$$S_0 \equiv 1[10] \text{ إذن : } S_0 = 1 \quad - 4$$

$$S_1 \equiv 8[10] \text{ إذن : } S_1 = 1 + 7$$

$$S_2 \equiv 7[10] \text{ إذن : } S_2 = 1 + 7 + 49$$

$$S_3 \equiv 0[10] \text{ إذن : } S_3 = 1 + 7 + 49 + 343$$

$$\text{خلاصة : إذا كان } n = 4k \text{ فإن } S_n \equiv 1[10]$$

$$\text{إذا كان } n = 4k + 1 \text{ فإن } S_n \equiv 8[10]$$

$$\text{إذا كان } n = 4k + 2 \text{ فإن } S_n \equiv 7[10]$$

$$\text{إذا كان } n = 4k + 3 \text{ فإن } S_n \equiv 0[10]$$

التمرين - 19

x و y عدنان طبيعان غير معدومان
أوجد الأعداد التي تكتب yx في النظام العشري و \overline{xy} في النظام ذو الأساس 7

الحل - 19

x و y هما رقمان في النظام ذو الأساس 7 إذن : $x \leq 6$ و $y \leq 6$
و حسب المعطيات $x \neq 0$ و $y \neq 0$

إذن : $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ؛ $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

في النظام العشري \overline{yx} ينشر إلى $x + 10y$

في النظام ذو الأساس 7 \overline{xy} ينشر إلى $7x + y$

منه : $x + 10y = 7x + y$ أي $9y = 6x$ أي $3y = 2x$

إذن : $x = \frac{3y}{2}$ منه y زوجي لأن $x \in \mathbb{N}$

أي $y \in \{2; 4; 6\}$

من أجل $y = 2$: $x = 6/2 = 3$

من أجل $y = 4$: $x = 12/2 = 6$

من أجل $y = 6$: $x = 18/2 = 9$ مرفوض لأن $x \leq 6$

نتيجة : $(x; y) \in \{(3; 2); (6; 4)\}$

إذن الأعداد المطلوبة هي $\frac{46}{7}$ و $\frac{23}{7}$ (مكتوبة في النظام العشري)
أو $\frac{64}{7}$ و $\frac{32}{7}$ مكتوبة في النظام ذو الأساس 7

التمرين - 20

عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $n = \overline{xyz}$ في النظام ذو الأساس 7 و يكتب

$n = \overline{zyx}$ في النظام ذو الأساس 11

الحل - 20

x ، y ، z أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن كل من x و y و z ينتمي إلى المجموعة

$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = \overline{xyz}$ إذن : $n = 49x + 7y + z$

في النظام ذو الأساس 11 : $n = \overline{zyx}$ إذن : $n = 121z + 11y + x$

إذن : $49x + 7y + z = 121z + 11y + x$

أي : $48x = 120z + 4y$

أي : $12x = 30z + y$

أي : $y = 12x - 30z$

أي : $y = 6(2x - 5z)$

منه : $\left. \begin{array}{l} \text{إما } y = 6 \text{ و } 2x - 5z = 1 \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } 2x - 5z = 0 \end{array} \right\}$

أي : $\left. \begin{array}{l} \text{إما } y = 6 \text{ و } 2x = 5z + 1 \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } 2x = 5z \end{array} \right\}$

أي : $\left. \begin{array}{l} \text{إما } y = 6 \text{ و } (x; z) = (3, 1) \\ \text{أو } y = 0 \text{ و } (x; z) \in \{(0; 0); (5; 2)\} \end{array} \right\}$

نتيجة : $(x; y; z) \in \{(0; 0; 0); (5; 0; 2); (3; 6; 1)\}$

أي : $n \in \{000; 502; 361\}$ في النظام ذو الأساس 7

إذن : $n \in \{0; 247; 190\}$ في النظام ذو الأساس 10

تحقيق :

$$\begin{array}{r|rr} 247 & 11 & \\ \hline 27 & 22 & 11 \\ \hline \boxed{5} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} & 11 & \\ \hline & 2 & 11 \\ \hline & \boxed{2} & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 190 & 11 & \\ \hline 80 & 17 & 11 \\ \hline \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{1} \end{array} \quad \begin{array}{r|rr} & 11 & \\ \hline & 1 & 11 \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} \end{array}$$

إذن : في النظام ذو الأساس 11 : $190 = \overline{163}$ و $247 = \overline{205}$

التمرين - 21

1 - بين أن إذا كانت الثنائية $(x ; y)$ من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x - 28y = 130$

فإن x زوجي و y مضاعف 5

2 - عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha\alpha3$ في النظام ذو الأساس 9 و يكتب $5\beta\beta6$ في النظام ذو الأساس 7

الحل - 21

1 - لتكن $(x ; y)$ ثنائية من $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
إذا كانت $(x ; y)$ حلاً للمعادلة $45x - 28y = 130$ فإن

$$\left. \begin{array}{l} 45x - 28y + 130 \\ 28y - 45x - 130 \end{array} \right\} \text{أي} \left. \begin{array}{l} 45x = 2(14y + 65) \\ 28y = 5(9x - 26) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{أي} \left. \begin{array}{l} 45x \text{ يقسم } 2 \\ 28y \text{ يقسم } 5 \end{array} \right\} \text{منه} \left. \begin{array}{l} x \text{ يقسم } 2 \\ y \text{ يقسم } 5 \end{array} \right\} \text{أي} \left. \begin{array}{l} x \text{ زوجي} \\ y \text{ مضاعف } 5 \end{array} \right\}$$

2 - في النظام ذو الأساس 9 : $n = 2\alpha\alpha3$ حيث $0 \leq \alpha \leq 8$

$$n = 2 \times 729 + 81\alpha + 9\alpha + 3 = 1461 + 90\alpha$$

في النظام ذو الأساس 7 : $n = 5\beta\beta6$ حيث $0 \leq \beta \leq 6$

$$n = 5 \times 343 + 49\beta + 7\beta + 6 = 1721 + 56\beta$$

$$\text{منه : } 1461 + 90\alpha = 1721 + 56\beta$$

$$\text{أي : } 90\alpha - 56\beta = 260$$

$$\text{منه : } 45\alpha - 28\beta = 130$$

منه حسب السؤال (1) فإن β مضاعف 5 و α زوجي .

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \beta \leq 6 \\ 0 \leq \alpha \leq 8 \end{array} \right\} \text{لكن} \left. \begin{array}{l} \beta = 5 \text{ أو } \beta = 0 \\ \alpha \in \{0; 2; 4; 6; 8\} \end{array} \right\} \text{إذن}$$

منه الحالات التالية :

$$\text{أولاً : } \beta = 0 \text{ إذن : } 45\alpha = 130$$

$$\text{منه : } \alpha = \frac{130}{45} = \frac{26}{9} \text{ مرفوض}$$

$$\text{ثانياً : } \beta = 5 \text{ إذن : } 45\alpha = 28(5) + 130$$

$$\text{أي : } \alpha = \frac{270}{45} = 6$$

نتيجة : $\alpha = 6$ و $\beta = 5$

$$\left. \begin{array}{l} n = 1461 + 60(6) = 2001 \\ n = 1721 + 56(5) = 2001 \end{array} \right\} \text{إذن : أو}$$

التمرين - 22

N عدد طبيعي يكتب $xyzx$ في النظام ذو الأساس 11 و يكتب $yyxz$ في النظام ذو الأساس 7

أكتب العدد N في النظام العشري .

الحل - 22

لتكن $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ المجموعة المعرفة بـ

الأعداد x, y, z هي أرقام في النظام ذو الأساس 7 إذن $x \in A, y \in A, z \in A$

$$\text{في النظام ذو الأساس 11 : } N = 11^3x + 11^2y + 11z + x = 1332x + 121y + 11z$$

$$\text{في النظام ذو الأساس 7 : } N = 7^3y + 7^2y + 7x + z = 392y + 7x + z$$

$$\text{منه : } 1332x + 121y + 11z = 392y + 7x + z$$

$$\text{أي : } 1325x + 10z = 271y$$

$$\text{أي : } 5(265x + 2z) = 271y \quad (1)$$

إذن : 5 يقسم $271y$ منه 5 يقسم y أي $y \in \{0; 5\}$ (لأن $y \in A$)

إذن نميز حالتين :

الاولى : $y = 5$ إذن : المساواة (1) تصبح : $5(265x + 2z) = 271 \times 5$

$$265x + 2z = 271 \quad \text{أي}$$

منه : $x = 1$ و $z = 3$ الثانية : $y = 0$ إذن : المساواة (1) تصبح :

$$265x + 2z = 0$$

منه : $x = 0$ و $z = 0$ خلاصة : $(x : y : z) \in \{(0 : 0 : 0) ; (1 : 5 : 3)\}$ من أجل $N \neq 0$ فإن $(x : y : z) = (0 : 0 : 0)$ من أجل $(x : y : z) = (1 : 5 : 3)$ فإن : $N = 1332 + 5(121) + 11(3)$

$$1332 + 605 + 33 = 1970$$

نتيجة : قيم N المطلوبة هي $\{0 : 1970\}$ التمرين - 23 n عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس 9 : $n = 127x$ 1 - عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 82 - عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 11الحل - 23 $x \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ إذن : 9 الأساس ذو النظام في

$$n = 127x \quad \text{اذن :} \quad n = 1 \times 9^3 + 2 \times 9^2 + 7 \times 9 + x$$

$$n = 954 + x$$

أي :

1 - لدينا $954 \equiv 2[8]$ إذن : $954 + x \equiv 2 + x[8]$ أي $n \equiv 2 + x[8]$ منه : يكون n قابلاً للقسمة على 8 إذا و فقط إذا كان $x + 2 \equiv 0[8]$

$$x \equiv -2[8] \quad \text{أي}$$

$$x \equiv 6[8] \quad \text{أي}$$

$$\text{أي } x = 6 \quad \text{لأن } 0 \leq x \leq 8$$

2 - لدينا $954 \equiv 8[11]$ منه $954 + x \equiv 8 + x[11]$ أي $n \equiv x + 8[11]$ إذن : يكون n قابلاً للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $x + 8 \equiv 0[11]$

$$x \equiv -8[11] \quad \text{أي}$$

$$x \equiv 3[11] \quad \text{أي}$$

$$\text{منه : } x = 3 \quad \text{لأن } 0 \leq x \leq 8$$

التمرين - 24عين العددين الطبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = 27x85y$

المكتوب في النظام العشري قابلاً للقسمة على 3 و على 11

الحل - 24كل من الأعداد الطبيعية x و y هي أرقام في النظام العشري .إذن : $0 \leq x \leq 9$ و $0 \leq y \leq 9$

$$n \equiv 0[3] \quad \text{يكافئ} \quad 2 + 7 + x + 8 + 5 + y \equiv 0[3]$$

$$x + y + 22 \equiv 0[3] \quad \text{يكافئ}$$

$$22 \equiv 1[3] \quad \text{لأن } x + y + 1 \equiv 0[3] \quad \text{يكافئ}$$

$$(1) \dots \dots \dots x + y \equiv 2[3] \quad \text{يكافئ}$$

$$y - 5 + 8 - x + 7 - 2 \equiv 0[11] \quad n \equiv 0[11] \quad \text{يكافئ}$$

$$y - x + 8 \equiv 0[11] \quad \text{يكافئ}$$

$$-8 - 3[11] \quad \text{لأن } y - x \equiv 3[11] \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{منه : } y - x = 3 \quad \text{أو} \quad y - x = -8 \quad \text{لأن } -9 \leq y - x < 9$$

$$\text{أي } y = x + 3 \quad \text{أو} \quad y = x - 8$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 3 \text{ و } x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \\ y = x - 8 \text{ و } x \in \{8; 9\} \end{array} \right\} \text{منه}$$

$$(x; y) \in \{(0; 3); (1; 4); (2; 5); (3; 6); (4; 7); (5; 8); (6; 9); (8; 0); (9; 1)\} : \text{منه}$$

$$x + y = 2[3] \text{ لكن}$$

$$(x; y) \in \{(4; 7); (1; 4); (8; 0)\} : \text{إذن}$$

$$n \in \{274857; 271854; 278850\} : \text{نتيجة}$$

التمرين 25

x عدد طبيعي

$$1 - \text{برهن أن : } 3x \equiv 0[7] \text{ تكافئ } x \equiv 0[7]$$

ليكن N و M عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري كمايلي :

$$M = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \text{ و } N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

$$2 - \text{برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا و فقط إذا كان } M - 2a_0 \text{ يقبل القسمة على 7}$$

$$3 - \text{استعمل هذه الطريقة لتبرير ما إذا كان العددان 105154 و 263572 قابلا للقسمة على 7}$$

الحل 25

$$1 - \text{ليكن x عدد طبيعي . لندرس بواقي قسمة } 3x \text{ على 7 كمايلي :}$$

$x \equiv ?[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$3x \equiv ?[7]$	0	3	6	2	5	1	4

$$\text{نتيجة : } 3x \equiv 0[7] \text{ يكافئ } x \equiv 0[7]$$

$$2 - \text{لدينا : } N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

$$\text{إذن : } N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$$

$$M = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \text{ لأن } = 10M + a_0$$

$$\text{منه : } N \equiv 10M + a_0[7]$$

$$\text{أي : } N \equiv 3M + a_0[7] \text{ لأن } 10 \equiv 3[7]$$

$$\text{نتيجة : } N \equiv 0[7] \text{ يكافئ } 3M + a_0 \equiv 0[7]$$

$$\text{يكافئ : } 3M + 15a_0 \equiv 0[7] \text{ لأن } 3a_0 \equiv a_0[7]$$

$$\text{يكافئ : } 3(M + 5a_0) \equiv 0[7]$$

$$\text{يكافئ : } M + 5a_0 \equiv 0[7] \text{ حسب السؤال (1)}$$

$$\text{يكافئ : } M - 2a_0 \equiv 0[7] \text{ لأن } 5 \equiv -2[7]$$

خلاصة : يكون N قابلا للقسمة على 7 إذا و فقط إذا كان $M - 2a_0$ قابلا للقسمة على 7

3 - لنستعمل طريقة هذا التمرين لإثبات ما إذا كان العدد 105154 قابلا للقسمة على 7 كمايلي :

$$\text{الخطوة الأولى : } N = 105154 \text{ ، } M = 10515$$

$$\text{إذن : } M - 2a_0 = 10515 - 2(4) = 10507 \text{ هل 10507 قابل للقسمة على 7 ؟}$$

$$\text{الخطوة الثانية : } N = 10507 \text{ ، } M = 1050$$

$$\text{هل 1036 قابل للقسمة على 7 ؟ } M - 2a_0 = 1050 - 2(7) = 1036$$

$$\text{الخطوة الثالثة : } N = 1036 \text{ ، } M = 103$$

$$\text{هل 91 قابل للقسمة على 7 ؟ } M - 2a_0 = 103 - 2(6) = 91$$

$$\text{الخطوة الرابعة : } N = 91 \text{ ، } M = 9$$

$$M - 2a_0 = 9 - 2(1) = 7$$

$$\text{نتوقف : } M - 2a_0 \equiv 0[7] \text{ إذن : 91 مضاعف 7}$$

$$\text{منه : 1036 مضاعف 7}$$

$$\text{منه : 10507 مضاعف 7}$$

$$\text{منه : 105154 مضاعف 7 . (يقبل القسمة على 7)}$$

لنعد نعمل الطريقة بالنسبة للعدد 263572

$$M - 2 a_0 = 26357 - 4 \cdot 26353 : \text{إذن } M = 26357 : N = 263572$$

$$M - 2 a_0 = 2635 - 6 = 2629 : \text{إذن } M = 2635 : N = 26353$$

$$M - 2 a_0 = 262 - 18 = 244 : \text{إذن } M = 262 : N = 2629$$

$$M - 2 a_0 = 24 - 8 = 16 : \text{إذن } M = 24 : N = 244$$

يمكن أن نتوقف هنا لأن 16 ليس مضاعف 7 إذن : 244 ليس مضاعف 7
منه 2629 ليس مضاعف 7 ومنه 26353 ليس مضاعف 7 إذن 263572 ليس مضاعف 7
تحقيق :

105154	7	263572	7
35	15022	53	37653
01		45	
15		37	
14		22	
0		1	

التمرين - 26

M و N عددان طبيعيين ومعتبان في النظام العشري كمايلي :

$$M = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 \quad \text{و} \quad N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

1 - برهن أن N يقبل القسمة على 13 إذا و فقط إذا كان $M + 4 a_0$ يقبل القسمة على 13

2 - استعمل هذه الطريقة لتبدير ما إذا كان العدد 1631216 قابلاً للقسمة على 13

الحل - 26

$$\begin{aligned} N &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \\ &= 10(a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0 \\ &= 10 M + a_0 \end{aligned} \quad - 1$$

نتيجة : $N \equiv 10 M + a_0 [13]$

لكن : $a_0 \equiv 40 [13]$ لأن $40 \equiv 1 [13]$

$$\text{إذن : } N \equiv 10 M + 40 a_0 [13]$$

$$\text{أي } N \equiv 10(M + 4 a_0) [13]$$

منه : يكون $N \equiv 0 [13]$ إذا و فقط إذا كان $10(M + 4 a_0) \equiv 0 [13]$

أي $M + 4 a_0 \equiv 0 [13]$ لأن لا يوجد قواسم مشتركة بين 10 و 13

2 - هل 1631216 قابل للقسمة على 13 ؟

$$M + 4 a_0 = 163121 + 24 = 163145 \quad ; \quad M = 163121 \quad ; \quad N = 1631216$$

$$M + 4 a_0 = 16314 + 20 = 16334 \quad ; \quad M = 16314 \quad ; \quad N = 163145$$

$$M + 4 a_0 = 1633 + 16 = 1649 \quad ; \quad M = 1633 \quad ; \quad N = 16334$$

$$M + 4 a_0 = 164 + 36 = 200 \quad ; \quad M = 164 \quad ; \quad N = 1649$$

$$M + 4 a_0 = 20 + 0 = 20 \quad ; \quad M = 20 \quad ; \quad N = 200$$

$N = 20$ لا يقبل القسمة على 13 إذن : نتوقف .

نتيجة : العدد 1631216 لا يقبل القسمة على 13

تحقيق :

1631216	13
33	125478
71	
62	
101	
106	
2	

التمرين - 27

N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري من الشكل $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

1 - بين أن العدد N يكون قابلاً للقسمة على 11 إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$ مضاعفاً لـ 11

2 - هل الأعداد التالية قابلة للقسمة على 11 : 72792973 : 43141408431

الحل - 27

$$\left. \begin{array}{l} a_n \times 10^n \equiv (-1)^n a_n[11] \\ a_{n-1} \times 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1} a_{n-1}[11] \\ \vdots \\ a_2 \times 10^2 \equiv a_2[11] \\ a_1 \times 10 \equiv -a_1[11] \end{array} \right\} \text{ منه } \left. \begin{array}{l} 10^n \equiv (-1)^n[11] \\ 10^{n-1} \equiv (-1)^{n-1}[11] \\ \vdots \\ 10^2 \equiv (-1)^2[11] \\ 10 \equiv -1[11] \end{array} \right\} \text{ إذن } 10 \equiv -1[11] - 1$$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots - a_1[11]$

منه $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \dots - a_1 + a_0[11]$

أي : $N \equiv a_0 - a_1 + \dots + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n[11]$

منه : يكون $N \equiv 0[11]$ إذا و فقط إذا كان $a_0 - a_1 + \dots + a_{n-1}(-1)^{n-1} + a_n(-1)^n \equiv 0[11]$

2 - هل العدد 72792973 مضاعف 11 ؟

$$3 - 7 + 9 - 2 + 9 - 7 + 2 - 7 = 0 \quad \text{إذن : العدد 72792973 مضاعف 11}$$

هل العدد 43141408431 مضاعف 11 ؟

$$1 - 3 + 4 - 8 + 0 - 4 + 1 - 4 + 1 - 3 + 4 = -11 \quad \text{إذن : العدد 43141408431 مضاعف 11}$$

التمرين - 28

- a عدد طبيعي أكبر تماماً من 1
- 1 - انشر الجداء : $A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
- 2 - إستنتج أنه في كل نظام تعداد يكون العدد 10101 يقبل القسمة على 111 ثم عين حاصل هذه القسمة .
- ملاحظة : العدد $(a-1)$ نرمز له بـ β في نظام التعداد ذو الأساس a حيث $a > 2$

الحل - 28

$$A = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$= a^4 - a^3 + a^2 + a^3 - a^2 + a + a^2 - a + 1$$

$$A = a^4 + a^2 + 1 \quad \text{إذن :}$$

2 - ليكن N عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس a (حيث $a > 1$) : $N = 10101$

إذن : $N = a^4 + a^2 + 1$ أي $N = a^4 + 0a^3 + a^2 + 0a + 1$

منه : حسب السؤال (1) فإن : $N = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \dots (1)$

لدينا : $a^2 + a + 1 = \overline{111}$ في نظام التعداد ذو الأساس a

و $a^2 - a + 1 = (a-1)a + 1$ فإن $a^2 - a + 1 = \beta 1$

حيث β هو رمز الرقم $(a-1)$ في نظام التعداد ذو الأساس a

نتيجة : المساواة (1) تصبح : $10101 = \overline{111} \times \beta 1$

أي : العدد 10101 يقبل القسمة على 111 و حاصل هذه القسمة يساوي $\beta 1$

التمرين - 29

- a عدد طبيعي أكبر تماماً من 1
- 1 - في نظام التعداد ذو الأساس a بين أن العدد 1001 يقبل القسمة على 11
- 2 - نمثل العدد $(a-1)$ بالرقم β . عين حاصل قسمة العدد 1001 على 11
- 3 - تحقق من هذه النتائج في النظام ذو الأساس 10 ثم في النظام ذو الأساس 12

الحل - 29

$$\begin{array}{r|l} a^3 + 1 & a + 1 \\ \hline a^3 + a^2 & a^2 - a + 1 \\ \hline -a^2 + 1 & \\ \hline -a^2 - a & \\ \hline a + 1 & \\ \hline a + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

1 - في نظام التعداد ذو الأساس a لدينا : $\overline{1001} = a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$

لدينا : $a + 1 = \overline{11}$

إذن : العدد 1001 قابل للقسمة على 11

2 - حسب السؤال (1) لدينا : $\overline{1001} = (a+1)(a^2 - a + 1) = (a+1)[(a-1)a + 1]$

لأن $\beta = a-1$ فإن $\overline{1001} = \overline{11} \times \beta 1$

$(a-1)a + 1 = \beta 1$

نتيجة : حاصل قسمة العدد 1001 على 11 هو $\overline{\beta 1}$

$$\begin{array}{r} 1001 \overline{) 11} \\ 11 \overline{) 91} \\ \underline{0} \end{array}$$

في النظام ذو الأساس 12 : $1001 = (12)^3 + 1 = 1729$

$$11 \quad 12 + 1 = 13$$

$$\begin{array}{r} 1729 \overline{) 13} \\ 42 \overline{) 133} \\ 39 \overline{) 133} \\ \underline{0} \end{array}$$

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

لنبحث عن كتابة العدد 133 في النظام ذو الأساس 12 كمايلي :

$$\begin{array}{r} 133 \overline{) 12} \\ 13 \overline{) 11} \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 11 \\ \underline{\beta} \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 0 \end{array}$$

إذن : $133 = \overline{\beta 1}$

التمرين - 30

1 - برهن أن من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ يكون العدد 1331 المكتوب في النظام ذو الأساس a هو مكعب لعدد طبيعي .

2 - عين أساس النظام الذي يكون فيه العدد 14641 قوة رابعة لعدد طبيعي .

الحل - 30

1 - من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 3$ لدينا في النظام ذو الأساس a :

$$1331 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$$

إذن : العدد 1331 في النظام ذو الأساس a هو مكعب للعدد $(a+1)$

2 - ليكن a أساس النظام الذي يكتب فيه العدد 14641 حيث $a > 6$

$$14641 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$$

$$= (a+1)^4$$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي a حيث $a > 6$ فإن العدد 14641 المكتوب

في النظام ذو الأساس a هو قوة رابعة للعدد $(a+1)$

التمرين - 31

n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 . نضع $a = n^2 + 1$

1 - أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $n^2 + 2$ ، $n^2 + 2n$ ، $(n^2 + 2)^2$ ، n^4 ،

2 - تحقق من نتائج السؤال (1) من أجل $a = 5$ ثم $a = 10$

3 - أكتب في النظام ذو الأساس a الأعداد التالية : $u = n(n^2 + 2)$ ، $v = n^2(n^2 + 2)$

الحل - 31

1 - لدينا $n > 1$ منه $n^2 > 1$

إذن : $n^2 + 1 > 2$ أي $a > 2$

أي : كل من 0 ، 1 ، 2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

من جهة أخرى $a = n^2 + 1$ إذن : $n^2 = a - 1$ أي $n^2 < a$

و خاصة $n < a$ إذن : كل من n و n^2 هي أرقام في النظام ذو الأساس a

لنبحث إذن عن كتابات الأعداد المطلوبة في النظام ذو الأساس a :

$$n^2 + 2 = (n^2 + 1) + 1 = a + 1 = 11$$

$$n^2 + 2n = n^2 + 1 + 2n - 1 = a + (2n - 1)$$

لنثبت أن $2n - 1 < a$

$$a - (2n - 1) = n^2 + 1 - (2n - 1)$$

$$= n^2 - 2n + 2 = \text{كثير حدود من الدرجة (2)}$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{إذن : من أجل كل } n \text{ من } N \text{ فإن } n^2 - 2n + 2 > 0$$

$$\text{أي : } a - (2n - 1) > 0 \text{ منه } a > 2n - 1$$

ليكن α رمز العدد $2n - 1$ في النظام ذو الأساس a

$$\text{إذن : } n^2 + 2n = a + \alpha$$

$$\text{منه : } n^2 + 2n = 1\alpha$$

$$(n^2 + 2)^2 = [(n^2 + 1) + 1]^2 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = \overline{121}$$

$$n^4 = (a - 1)^2 \quad \text{منه} \quad n^2 = a - 1 \quad \text{إذن} \quad a = n^2 + 1 \quad \text{لدينا}$$

$$n^4 = a^2 - 2a + 1 \quad \text{أي} :$$

$$a^2 + 2a + 1 = \overline{121} \quad \text{لاحظ أيضا أن} \quad (a^2 + 2a + 1) + (a^2 - 2a + 1) = 2a^2 + 2 = \overline{202}$$

$$\overline{121} + (a^2 - 2a + 1) = \overline{202} \quad \text{منه} :$$

$$a^2 - 2a + 1 = \overline{202} - \overline{121} = \overline{\beta 1} \quad \text{أي}$$

$$\text{حيث } \beta \text{ هو رمز الرقم } (a - 2)$$

$$n^4 = \overline{\beta 1} \quad \text{نتيجة} :$$

$$n = 2 \quad \text{من أجل} \quad a = 5 \quad \text{فإن} \quad n^2 = 4 \quad \text{إذن} \quad n^2 = 2$$

$$\text{إذن} \quad n^2 + 2 = 6 \quad ; \quad n^2 + 2n = 8 \quad ; \quad (n^2 + 2)^2 = 36 \quad ; \quad n^4 = 16$$

$$\text{لدينا} \quad 6 = \overline{11}$$

$$8 = \overline{13} \quad \text{منه} \quad \alpha = 2n - 1 = 3$$

$$36 = \overline{121}$$

$$16 = \overline{31} \quad \text{إذن} \quad \beta = 5 - 2 = 3$$

التحقيق :

$$\text{في نظام التعداد ذو الأساس 5} \quad \begin{cases} \overline{11} = 5 + 1 = 6 \\ \overline{13} = 5 + 3 = 8 \\ \overline{121} = 25 + 10 + 1 = 36 \\ \overline{31} = 15 + 1 = 16 \end{cases}$$

$$\text{من أجل} \quad a = 10 \quad \text{فإن} \quad n^2 = 9 \quad \text{منه} \quad n = 3$$

$$\text{إذن} \quad n^2 + 2 = 11 \quad ; \quad n^2 + 2n = 15 \quad ; \quad (n^2 + 2)^2 = 121 \quad ; \quad n^4 = 81$$

$$\text{لدينا} \quad 11 = \overline{11} \quad \text{في نظام التعداد ذو الأساس 10}$$

$$15 = \overline{15} \quad \text{منه} \quad \alpha = 2n - 1 = 5 \quad \text{في نظام التعداد ذو الأساس 10}$$

$$121 = \overline{121} \quad \text{في نظام التعداد ذو الأساس 10}$$

$$81 = \overline{81} \quad \text{منه} \quad \beta = 10 - 2 = 8 \quad \text{في نظام التعداد ذو الأساس 10}$$

$$u = n(n^2 + 2)$$

$$= n[(n^2 + 1) + 1]$$

$$= n(a + 1)$$

$$= na + n$$

$$\text{حيث } \lambda \text{ هو رمز الرقم } n \quad = \overline{\lambda \lambda}$$

$$v = n^2(n^2 + 2)$$

$$= n^2[(n^2 + 1) + 1]$$

$$= n^2(a + 1)$$

$$= n^2a + n^2$$

$$\text{حيث } \gamma \text{ هو رمز الرقم } n^2 \quad = \overline{\gamma \gamma}$$

التعريف 32

ليكن $N = a^2 - b^2$ عدد طبيعي فردي و ليس أولي حيث يكتب من الشكل

$$a \text{ و } b \text{ عددان طبيعيان يحققان } a > b$$

1- برهن أن a و b ليسا من شعبة واحدة (أحدهما زوجي و الآخر فردي)

نقبل أن العدد 250507 ليس أولي .

$$\text{لتكن المعادلة} \quad a^2 - 250507 = b^2 \quad (E) \dots\dots\dots \text{ ذات المجهولين الطبيعيين } a \text{ و } b$$

2- عين البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 من أجل كل قيم العدد الطبيعي x

3- استنتج البواقي الممكنة للعدد $a^2 - 250507$ بتريدي 9 ثم عين بواقي a^2 بتريدي 9 في كل حالة .

4- برهن أن البواقي الممكنة للعدد a بتريدي 9 هما 1 و 8

5- برهن أن إذا كانت الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E) فإن $a \geq 501$

6- برهن أنه لا يوجد أي ثنائية من الشكل $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

لتكن الثنائية $(a ; b)$ حلا للمعادلة (E)

- 7 - برهن أن $a = 503[9]$ أو $a = 505[9]$
 8 - عين أصغر عدد طبيعي k حيث تكون الثنائية $(505 + 9k ; b)$ تحقق المعادلة (E) ثم أعط قيمة b
 9 - استنتج مما سبق تحليلاً إلى جداء عاملين للعدد 250507
 10 - هل العاملين أوليين فيسا بينهما ؟

الحل - 32

$$N = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad - 1$$

لدينا الحالات الممكنة التالية :

شعبية a	شعبية b	شعبية $a + b$ أو $a - b$	شعبية N
فردى	فردى	زوجى	زوجى
فردى	زوجى	فردى	فردى
زوجى	زوجى	زوجى	زوجى
زوجى	فردى	فردى	فردى

نتيجة : يكون N فردى إذا فقط إذا كان a و b ليسا من نفس الشفعية
 2 - بواقي قسمة x^2 على 9

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1

- 3 - لدينا : $250507 \equiv 1[9]$ منه $-250507 \equiv -1[9]$
 أي $-250507 \equiv 8[9]$ لأن $-1 \equiv 8[9]$
 إذن : $a^2 - 250507 \equiv a^2 + 8[9]$
 إذا وضعنا $x = b$ فإن : $x^2 = b^2$ أي $x^2 = a^2 - 250507$
 منه : $x^2 \equiv a^2 + 8[9]$
 أي : $x^2 - 8 \equiv a^2[9]$
 أو $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$

منه الجدول التالي :

$x \equiv ?[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2 - 8 \equiv ?[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$x^2 - 8 \equiv ?[9]$	1	2	5	1	8	8	1	5	2

4 - حسب السؤال (1) فإن البواقي الممكنة للعدد x^2 على 9 هي : $\{0 ; 1 ; 4 ; 7\}$ إذن : البواقي المقبولة للعدد $x^2 - 8$ هي 1 فقط لأن $a^2 \equiv x^2 - 8[9]$ و بواقي a^2 بترديد 9 لا يمكن أن تكون من المجموعة $\{2 ; 5 ; 8\}$ منه : $a^2 \equiv 1[9]$ أي $a \equiv 1[9]$ أو $a \equiv 8[9]$ 5 - لنفكر الثنائية $(a ; b)$ حلاً للمعادلة (E)

$$b^2 = a^2 - 250507 \quad \text{إذن :}$$

$$a^2 = 250507 + b^2 \quad \text{منه :}$$

$$b^2 \geq 0 \quad \text{إذن :} \quad a^2 \geq 250507$$

$$a \geq \sqrt{250507} \quad \text{أي :}$$

$$a \geq 501 \quad \text{أي :}$$

6 - من أجل $a = 501$ المعادلة (E) تكافئ $(501)^2 - 250507 = b^2$

$$251001 - 250507 = b^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$494 = b^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$b = \sqrt{494} \quad \text{تكافئ} \quad b \notin \mathbb{N} \quad \text{إذن}$$

نتيجة : لا توجد أي ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)7 - حسب السؤال (5) فإن $a \neq 501$ لأن لا توجد ثنائية $(501 ; b)$ تحقق المعادلة (E)

$$\text{إذن :} \quad a \geq 502$$

أكمل الجدول المقابل :

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

3 - هل يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x, y, z حيث $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$ الجزء II : ليكن $n > 3$ نفرض أنه توجد أعداد طبيعية x, y, z تحقق الشرط (E)1 - برر أن الأعداد x, y, z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .نفرض أن x و y زوجيان و z فردي2 - برهن أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$

3 - استنتج أن هناك تناقض

نفرض أن x, y, z كلها فردية .4 - أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي k : $k^2 + k \equiv 0[2]$ 5 - استنتج أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$. ماذا تستنتج ؟

الحل - 33

الجزء I

1 - $(x; y; z) = (1; 3; 5)$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 9 + 25 = 35$ بما أن $35 \equiv 3[4]$ أي $35 \equiv 3[2^2]$ و $3 = 2^2 - 1$ فإن الثلاثية $(1; 3; 5)$ تحقق الشرط (E) من أجل $n = 2$

- 2

$m \equiv ?[8]$	r	0	1	2	3	4	5	6	7
$m^2 \equiv ?[8]$	R	0	1	4	1	0	1	4	1

3 - حسب الجدول فإن البواقي الممكنة لقسمة مربع عدد طبيعي على 8 هي $\{0; 1; 4\}$ إذن البواقي الممكنة لقسمة x^2 أو y^2 أو z^2 على 8 هي أيضا $\{0; 1; 4\}$ لنبحث إذن على البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2$ على 8 كمايلي :إذن : البواقي الممكنة لـ $x^2 + y^2$ قسمة على 8 هي $\{0; 1; 2; 4; 5\}$ منه : البواقي الممكنة لـ $x^2 + y^2 + z^2$ قسمة على 8 هي كمايلي :

$x^2 \backslash y^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

$z^2 \backslash x^2 + y^2$	0	1	2	4	5
0	0	1	2	4	5
1	1	2	3	5	6
4	4	5	6	0	1

نتيجة : البواقي الممكنة لقسمة $x^2 + y^2 + z^2$ على 8 هي $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ إذن : لا يمكن إيجاد ثلاث أعداد طبيعية x, y, z تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$

الجزء II

1 - لتكن الثلاثية $(x; y; z)$ تحقق الشرط (E) إذن : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 2^n[2^n]$ أي : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 \equiv 0[2^n]$ إذن : العدد $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$ زوجي أي العدد $(x^2 + y^2 + z^2)$ فردي

x	y	z	x ²	y ²	z ²	x ² + y ² + z ²
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

نميز الحالات التالية :

نرمز إلى العدد الزوجي بـ 0

نرمز إلى العدد الفردي بـ 1

نتيجة : حسب الجدول يكون $x^2 + y^2 + z^2$ فرديا

في حالتين فقط :

أما x ، y ، z فردية كلها

أو أحدها فردي و الآخرين زوجيين

2- x و y زوجيان و z فردي .

نضع $z = 2q + 1$ ، $y = 2p$ ، $x = 2k$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4k^2 + 4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 4(k^2 + p^2 + q^2 + q) + 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4] \quad \text{إذن :}$$

3- لدينا : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 = 4k + 1$ حيث $k \in \mathbb{N}$ إذا كان $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن : $x^2 + y^2 + z^2 = m \times 2^n + 2^n - 1$ حيث $m \in \mathbb{N}$

$$4k + 1 = m \times 2^n + 2^n - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$4k + 2 = 2^n(m + 1) \quad \text{أي :}$$

$$2(2k + 1) = 2^n(m + 1) \quad \text{أي :}$$

$$2^n = 2 \times 2 \times 2^{n-2} \quad \text{بما أن } n > 3 \text{ فإن :}$$

$$2(2k + 1) = 2 \times 2 \times 2^{n-2}(m + 1) \quad \text{منه المساواة (α) تصبح :}$$

$$(2k + 1) = 2 \times 2^{n-2}(m + 1) \quad \text{أي :}$$

لأن $(2k + 1)$ فردي و $2 \times 2^{n-2}(m + 1)$ زوجي

إذن : لا يمكن أن يكون x و y زوجيان و z فردي

4- لندرس بواقي قسمة العدد $k^2 + k$ على 2 كمايلي :

$k \equiv ?[2]$	0	1
$k^2 \equiv ?[2]$	0	1
$k^2 + k \equiv ?[2]$	0	0

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي k فإن $k^2 + k \equiv 0[2]$ 5- x ، y ، z أعداد فردية إذن : نضع $z = 2q + 1$ ، $y = 2p + 1$ ، $x = 2k + 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1$$

$$= 4(k^2 + k) + 4(p^2 + p) + 4(q^2 + q) + 3$$

لكن حسب السؤال السابق فإن كل من الأعداد $k^2 + k$ و $p^2 + p$ و $q^2 + q$ هي أعداد زوجيةإذن : $k^2 + k = 2k'$ ، $p^2 + p = 2p'$ ، $q^2 + q = 2q'$ حيث k' ، p' ، q' أعداد طبيعية

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4(2k') + 4(2p') + 4(2q') + 3$$

$$= 8k' + 8p' + 8q' + 3$$

$$= 8(k' + p' + q') + 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8] \quad \text{إذن :}$$

نتيجة : لدينا : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$ إذن : $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 3$ حيث $k \in \mathbb{N}$ إذا كان $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1[2^n]$ فإن $x^2 + y^2 + z^2 = p \times 2^n + 2^n - 1$

$$8k + 3 = p \times 2^n + 2^n - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$8k + 4 = 2^n(p + 1) \quad \text{أي :}$$

$$4(2k + 1) = 2^n(p + 1) \quad \text{أي :}$$

$$2^n = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3} \quad \text{لكن } n > 3 \text{ إذن :}$$

$$4(2k + 1) = 2 \times 2 \times 2 \times 2^{n-3}(p + 1) \quad \text{منه المساواة (β) تصبح :}$$

$$2k + 1 = 2 \times 2^{n-3}(p + 1) \quad \text{أي :}$$

$$2 \times 2^{n-3}(p + 1) \quad \text{و}$$

خلاصة : من أجل $n > 3$ لا توجد أي ثلاثية (x ; y ; z) من الأعداد الطبيعية تحقق الشرط (E)

الفهرس

الصفحة	المحور
1	المحور 1 : المتتاليات
8	حلول تمارين الكتاب المدرسي
52	المحور 2 : الإحتمالات الشرطية
58	حلول تمارين الكتاب المدرسي
84	حلول لتمرين نماذج للبكلوريا
101	المحور 3 : قوانين الإحتمال
108	حلول تمارين الكتاب المدرسي
131	المحور 4 : الموافقات في Z
134	حلول تمارين الكتاب المدرسي
162	حلول لتمرين نماذج للبكلوريا
186	الفهرس

سلسلة هياج

TEL : 0773 26 52 81